Peubah Acak

Definisi Peubah Acak

Peubah acak adalah peubah yang mengkarakterisasikan setiap elemen dalam ruang sampel dengan suatu bilangan real.

$\Rightarrow$ merepresentasikan setiap hasil eksperimen/pengukuran dengan suatu nilai real

X **: peubah acak**

$\boldsymbol{x}$ **: nilai diskrit yang mungkin dari masing-masing elemen**

$\boldsymbol{P(X = x)}$ **: probabilitas** ***X*** **sama dengan** $\boldsymbol{x}$**.**

Misal:

✓ Pelemparan sebuah dadu

X = nilai dari muka dadu $\Rightarrow x = 1,2,\dots,6$

$S = \{1,2,\dots,6\}$

$P(X = 1) = P(X = 2) = \dots = P(X = 6) = 1/6$

✓ Suhu kota Bandung dalam bulan Agustus

X = nilai suhu $\Rightarrow x = 22.0, \dots, 30.0$ (sembarang, kontinyu)

$S = [22.0, 30.0]$

$P(X < 28) = ?$ P(25 < X < 28) = ?

Peubah acak dapat bersifat diskrit atau kontiyu

Distribusi diskrit dan fungsi probabilitas

Jika ruang sampel terdiri dari sejumlah kemungkinan yang terbatas,

fungsi probabilitas atau distribusi probabilitas dari peubah acak diskrit X adalah suatu set pasangan $(x, f(x))$, dimana $f(x) = P(X = x)$

$f(x) = P(X = x)$ ⟵ *rapat fungsi*

$$0 \leq f(x) \leq 1$$

$$\sum_{x} f(x) = 1$$

Misal:

Pelemparan sebuah dadu

X = nilai dari muka dadu

$\Rightarrow x = 1,2,\ldots,6$

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = P(X = 1) = 1/6 \\ f(2) = P(X = 2) = 1/6 \\ \ldots \\ f(6) = P(X = 6) = 1/6 \end{array}\right\} \textit{rapat fungsi diskrit uniform}$$

Fungsi distribusi komulatif (jumlah) dari distribusi diskrit

Fungsi distribusi komulatif $F(x)$ dari suatu peubah acak X dengan rapat fungsi $f(x)$ adalah

$$F(x) = P(X \le x) = \sum_{x=0}^{x} f(x)$$

Jelas bahwa

$$P(X \le x) = 1 - \sum_{x=0}^{x} f(x)$$

Contoh:

Sebuah dadu dilempar dua kali. Tentukan peubah acak, distribusi probabilitas dan fungsi distribusi komulatif dari eksperimen tersebut !!!

Distribusi binomial

N kejadian independen dengan hanya ada 2 kemungkinan untuk setiap keluaran: '**berhasil**' atau '**gagal**' (**Bernoulli Trial**)

dimana *p* : probabilitas 'berhasil' (*q=1-p* : probabilitas 'gagal')

X = jumlah keberhasilan dalam *N* percobaan (peubah acak **binomial**)

x = 1,2,…,*N*

Peluang muncul keluaran (dalam urutan tertentu), mis. 'ssfsf' adalah

$$pp(1-p)\,p(1-p) = p^x(1-p)^{N-x}$$

Tetapi, jika urutan pemunculan tidak penting, maka ada $\frac{N!}{x!(N-x)!}$

cara (permutasi) untuk mendapatkan x kali 'berhasil' dalam *N* percobaan.

Fungsi probabilitas untuk x kali 'berhasil' adalah

$$f(x;n,p) = P(X=x) = \frac{n!}{x!(n-x)!}p^x(1-p)^{n-x}$$

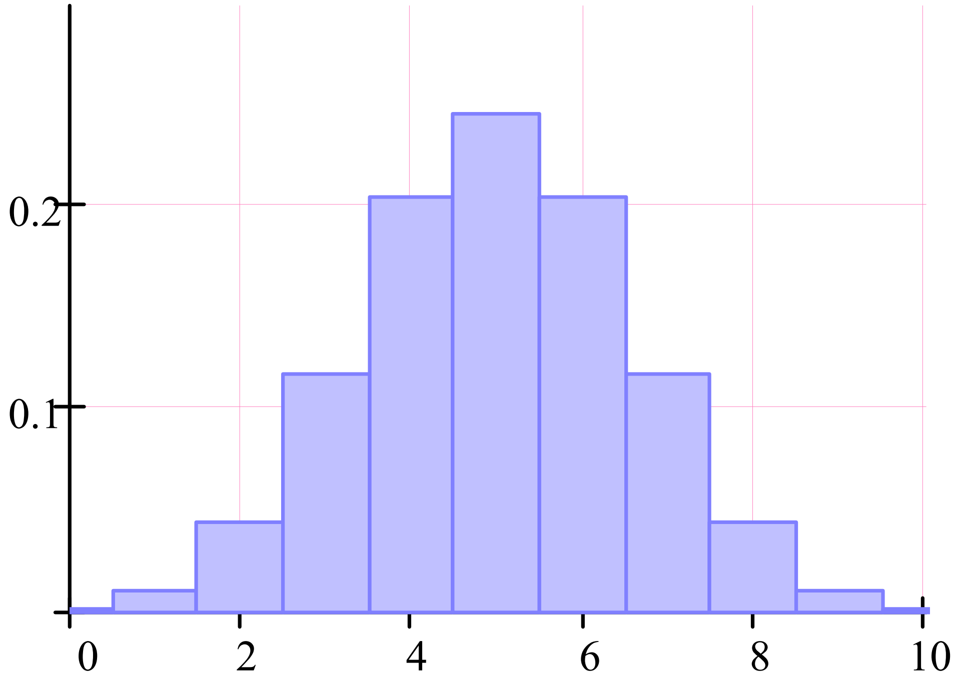
atau $$f(x;n,p) = \binom{n}{x}p^x q^{n-x}$$

Contoh:

Pelemparan koin dengan keluaran H dan T (p = q = 0.5) sebanyak 10 kali

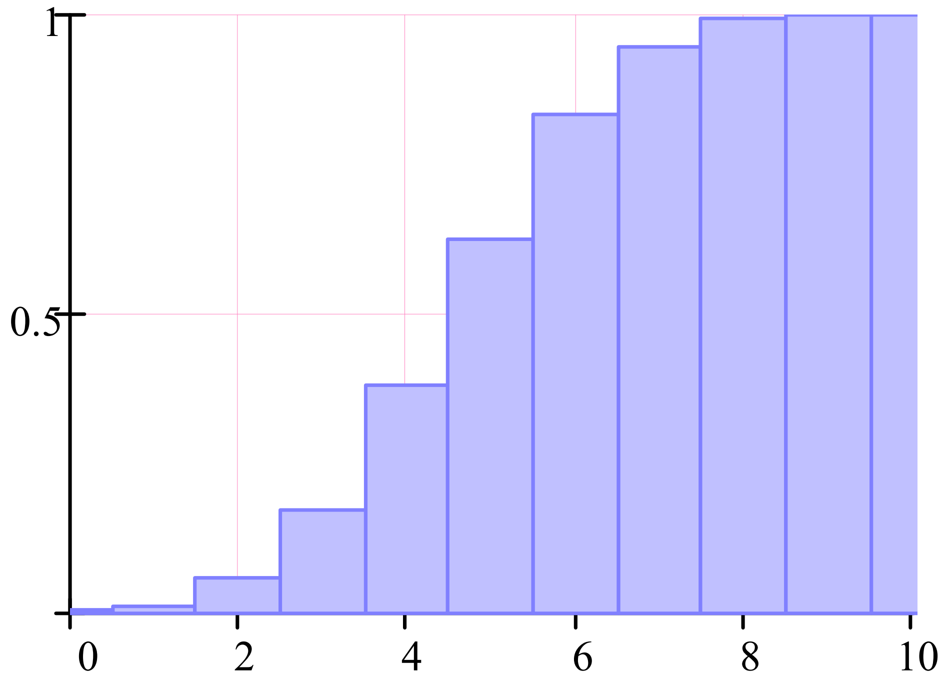
$$f\left(x;10,0.5\right)=\binom{10}{x}p^{x}q^{10-x}$$

0	0
1	0.01
2	0.04
3	0.12
4	0.21
5	0.25
6	0.21
7	0.12
8	0.04
9	0.01
10	0

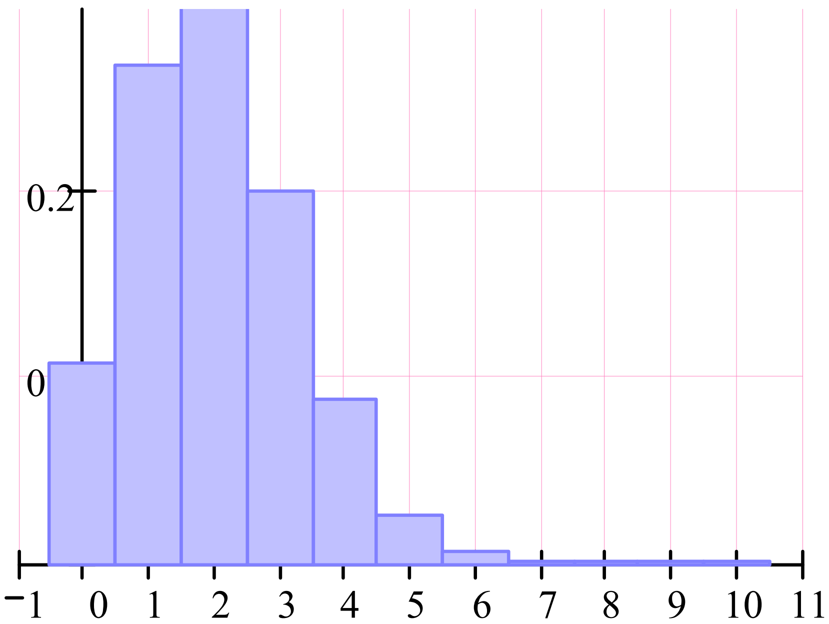


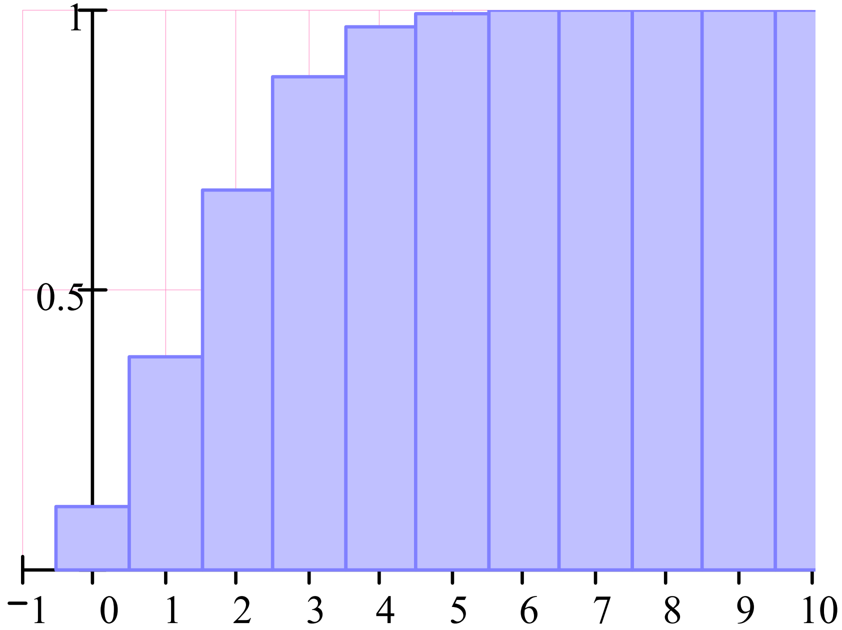
$$F(x) = P(X \le x) = \sum_{x=0}^{x} f(x)$$

0	0
1	0.01
2	0.05
3	0.17
4	0.38
5	0.62
6	0.83
7	0.95
8	0.99
9	1
10	1

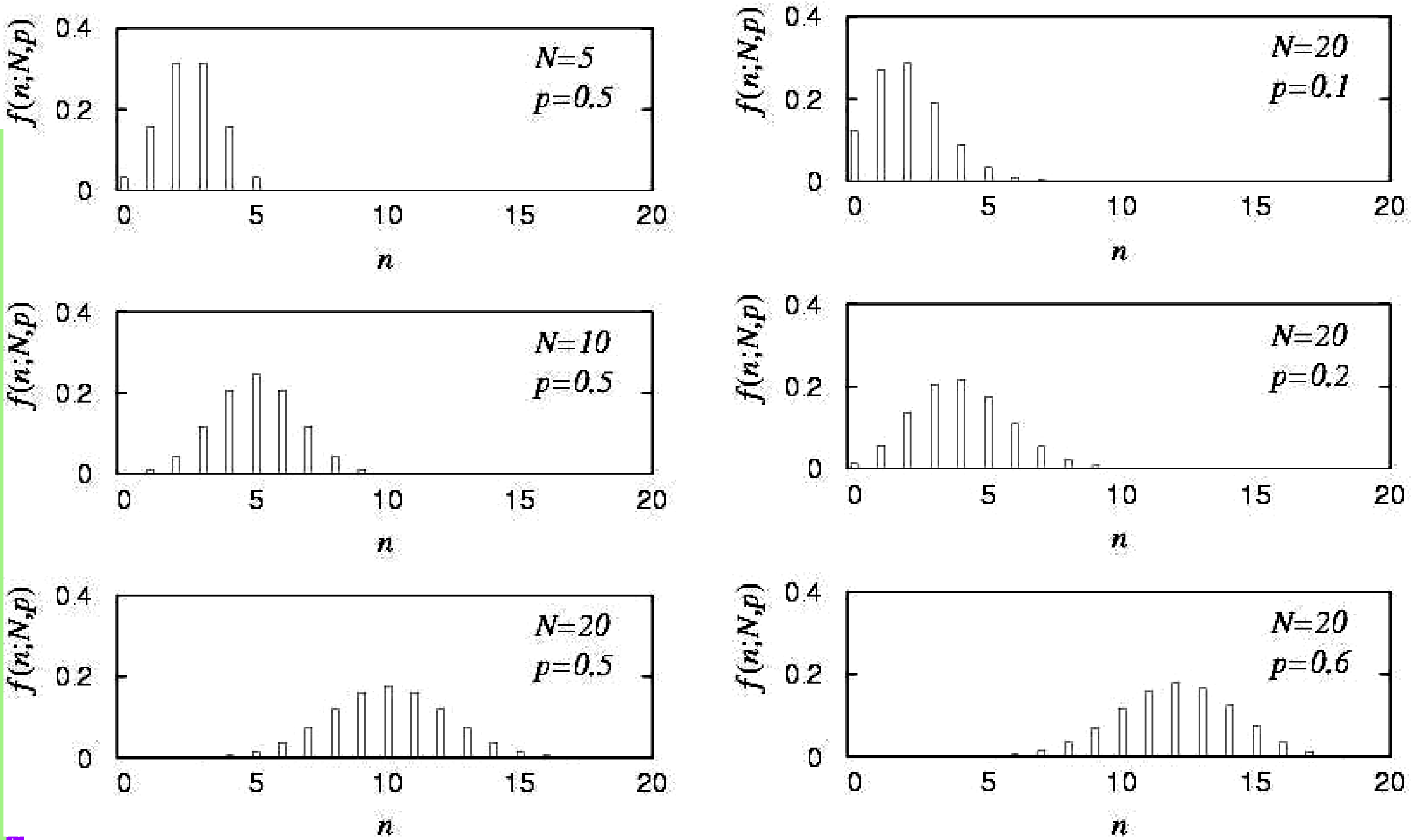


Pelemparan koin dengan keluaran H dan T (p = 0.2) sebanyak 10 kali





Distribusi Binomial untuk berbagai variasi parameter



Contoh:

Pelemparan koin sebanyak 3 kali

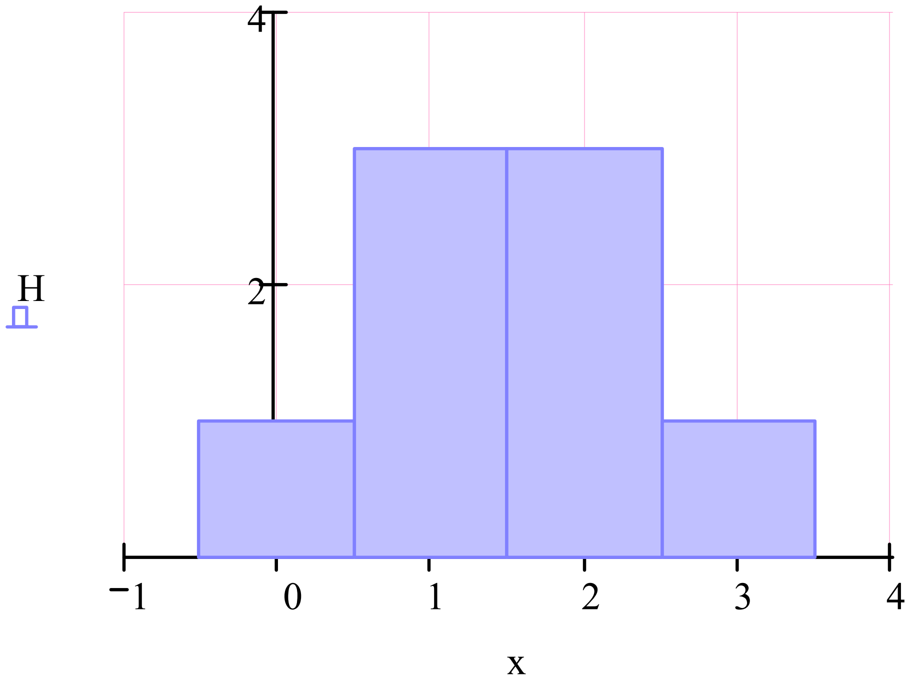
Kemungkinan keluaran untuk setiap pelemparan:

heads = berhasil

tails = gagal

Ruang sampel *S* = {HHH, HHT, HTT, TTT, TTH, THH, THT, dan HTH}

Keluaran	***x***	**freq**
HHH	**3**	**1**
HHT	**2**	
THH	**2**	**3**
HTH	**2**	
HTT	**1**	
THT	**1**	**3**
TTH	**1**	
TTT	**0**	**1**



Nilai ekspektasi (rata-rata) dan ukuran sebaran

$$f\left(x; n, p\right) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

peubah acak parameter

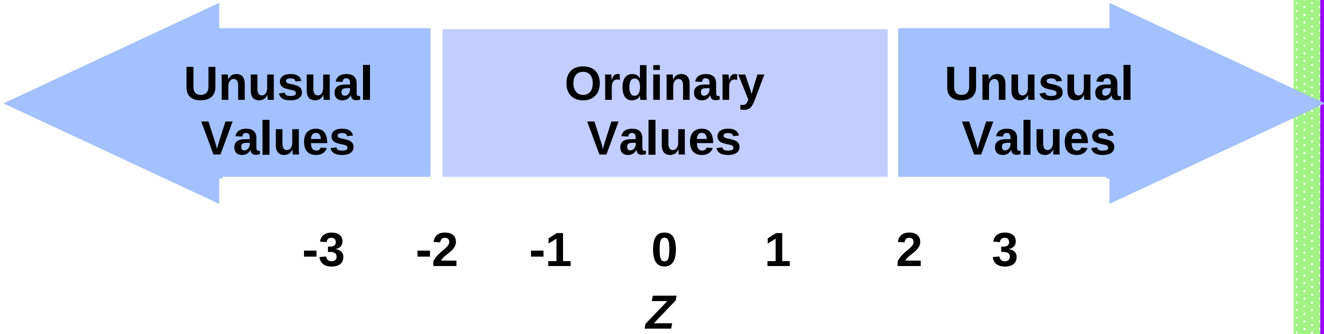
Nilai ekspektasi (rata-rata) dan standard deviasi (akar dari variansi):

Rata-rata $$\mu = E\left(X\right) = \sum_{i=0}^{n} x_i f\left(x_i; n, p\right) = np$$

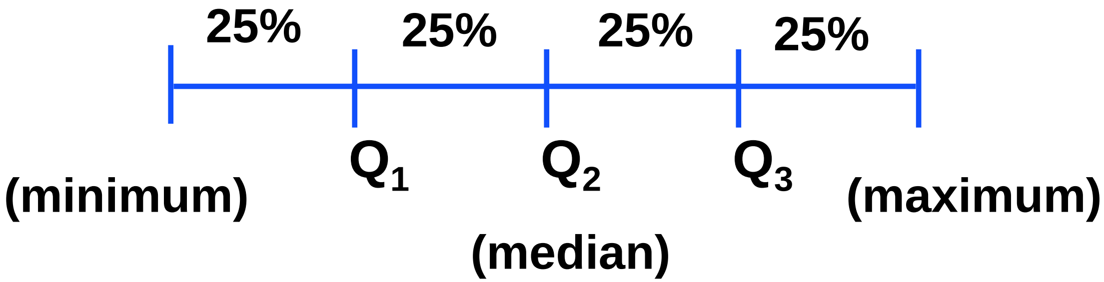
Deviasi standard $$\sigma = \sqrt{E\left(X^2\right) - \left(E\left(X\right)\right)^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \mu\right)^2}{n}} = \sqrt{np\left(1-p\right)}$$

z Score. Quartile dan Percentile

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$



Quartile (Q)



Percentile (Q)

$P_{25} = Q1$

$P_{50} = Q2$

$P_{75} = Q3$

Peubah Acak Kontinyu

Peubah acak kontinyu dan fungsi rapat probabilitas

Nilai dari peubah acak (X) atau keluaran dari eksperimen/pengukuran (*x*) bersifat kontinyu

$$P(x \text{ found in } [x, x+dx]) = f(x)\,dx$$

$\Rightarrow$ *f(x)* = fungsi rapat probabilitas (probability density function (pdf))

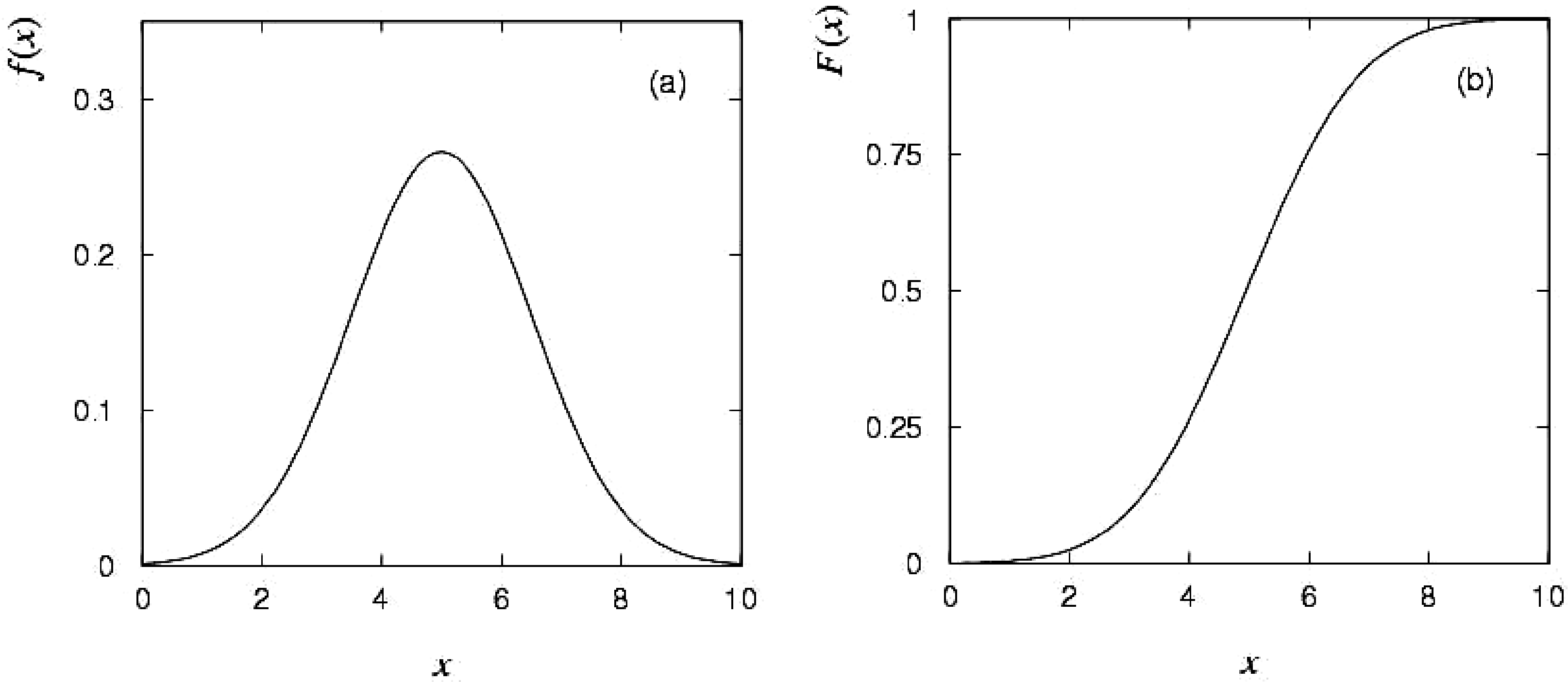
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

Peluang menemukan keluaran lebih kecil atau sama dengan x adalah

$$\int_{-\infty}^{x} f(x')\,dx' \equiv F(x)$$

fungsi jumlah/ distribusi komulatif (cumulative distribution function (cdf))

Kurva pdf dan cdf



Hubungan pdf dan cdf:

$$f\left(x\right)=\frac{\partial F\left(x\right)}{\partial x}$$

$$F\left(x\right)=P\left(X\leq x\right)=\int_{-\infty}^{x} f\left(x\right)dx$$

$$F\left(b\right)-F\left(a\right)=P\left(a<X<b\right)$$

Nilai ekspektasi (rata-rata)

$$E(X) = \mu = \int x \; f(x) dx$$

~ "centre of gravity" of pdf

Untuk fungsi $y(x)$ dengan pdf $g(y)$,

$$E[y] = \int y \, g(y) \, dy = \int y(x) f(x) \, dx$$

Variansi: $V[x] = E[x^2] - \mu^2 = E[(x-\mu)^2]$

$$V[x] = \sigma^2$$

Deviasi standard: $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$ (σ ~ lebar dari pdf)

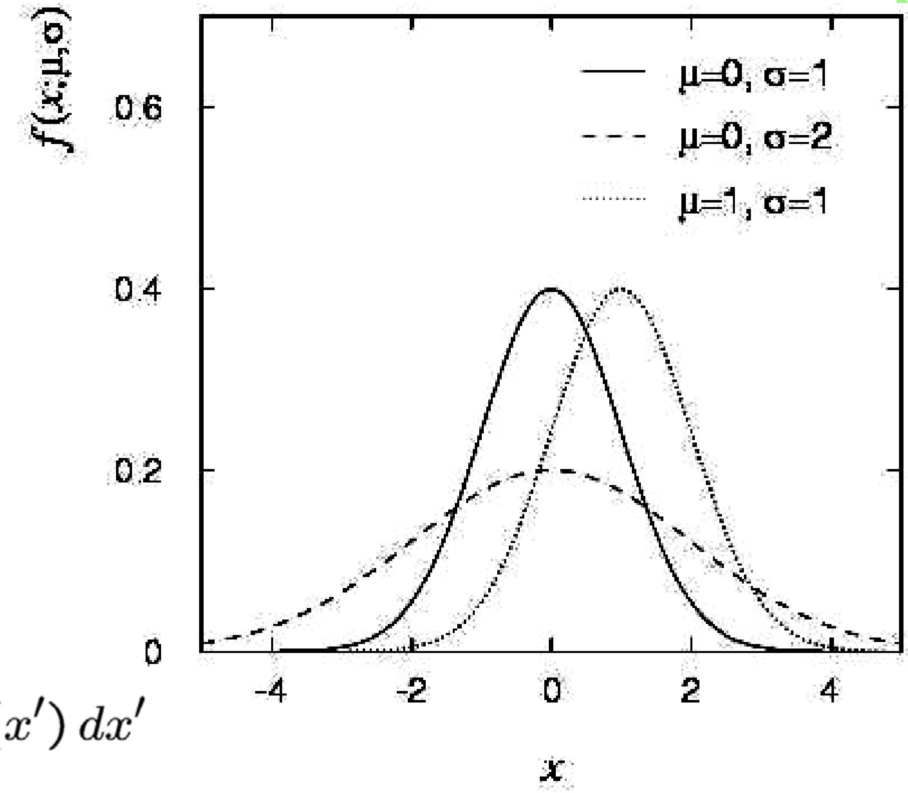
Distribusi Normal (Gaussian)

binomial (diskrit) ⇒ **normal (Gaussian) (kontinyu)**

$$f(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$$

$$E[x] = \mu$$

$$V[x] = \sigma^2$$



Kasus khusus: $\mu = 0$, $\sigma^2 = 1$ ('standard Gaussian', tersedia dalam bentuk tabel):

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \quad \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(x')\, dx'$$

Dipakai untuk menentukan fungsi probabilitas dari sembarang fungsi Gaussian dengan melakukan transformasi $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$

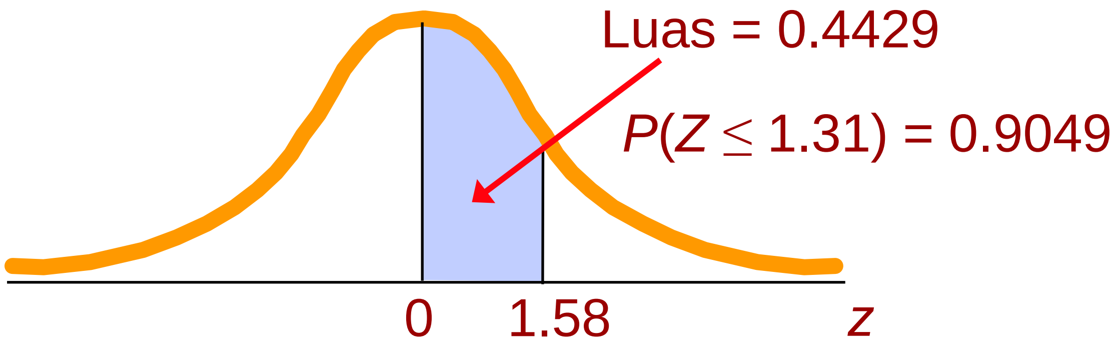
Tabel Distribusi Normal Standard ($P(Z \leq z)$) dan Pemakaiannya

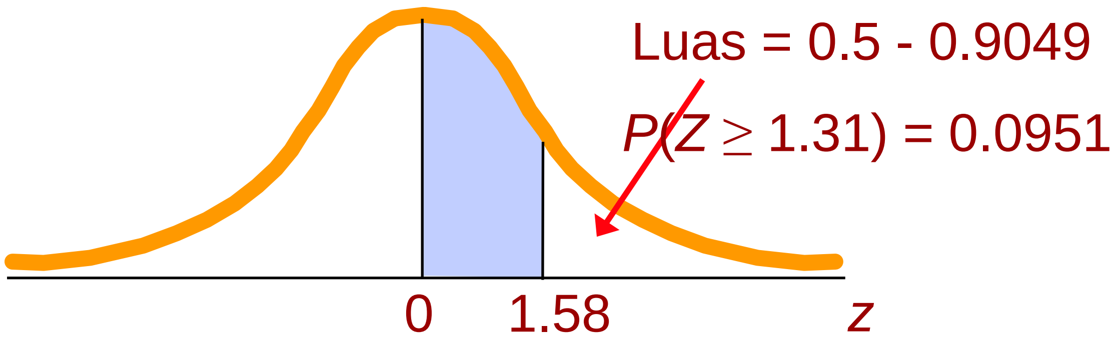
z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
−3.4	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0002
−3.3	.0005	.0005	.0005	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0003
−3.2	.0007	.0007	.0006	.0006	.0006	.0006	.0006	.0005	.0005	.0005
−3.1	.0010	.0009	.0009	.0009	.0008	.0008	.0008	.0008	.0007	.0007
−3.0	.0013	.0013	.0013	.0012	.0012	.0011	.0011	.0011	.0010	.0010

$P(Z \leq -3.00) = 0.0013$

$P(Z \leq -2.59) = 0.0048$

$P(Z \leq 1.31) = 0.\ 9049$



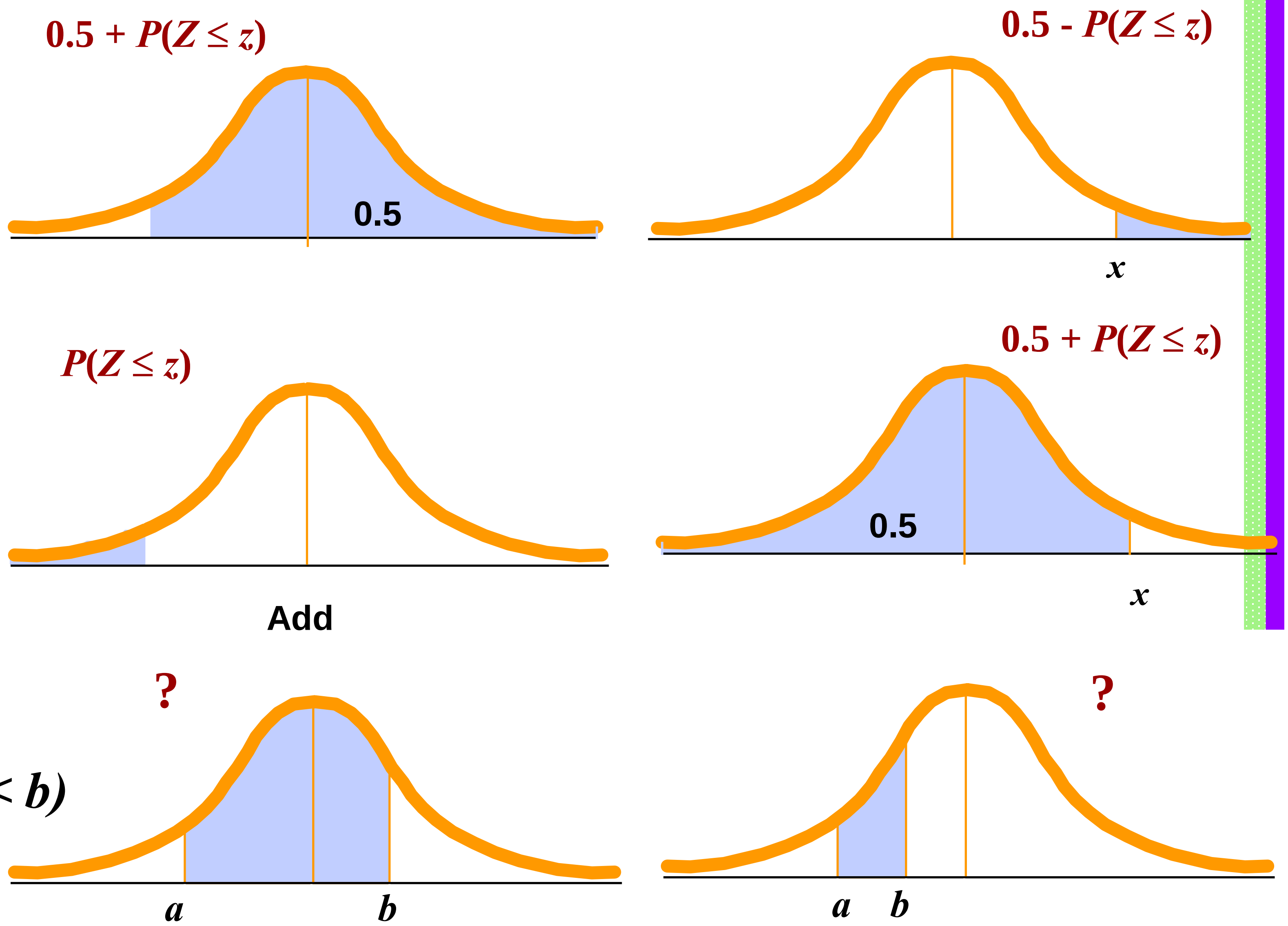


Probabilitas dan luas di bawah kurva

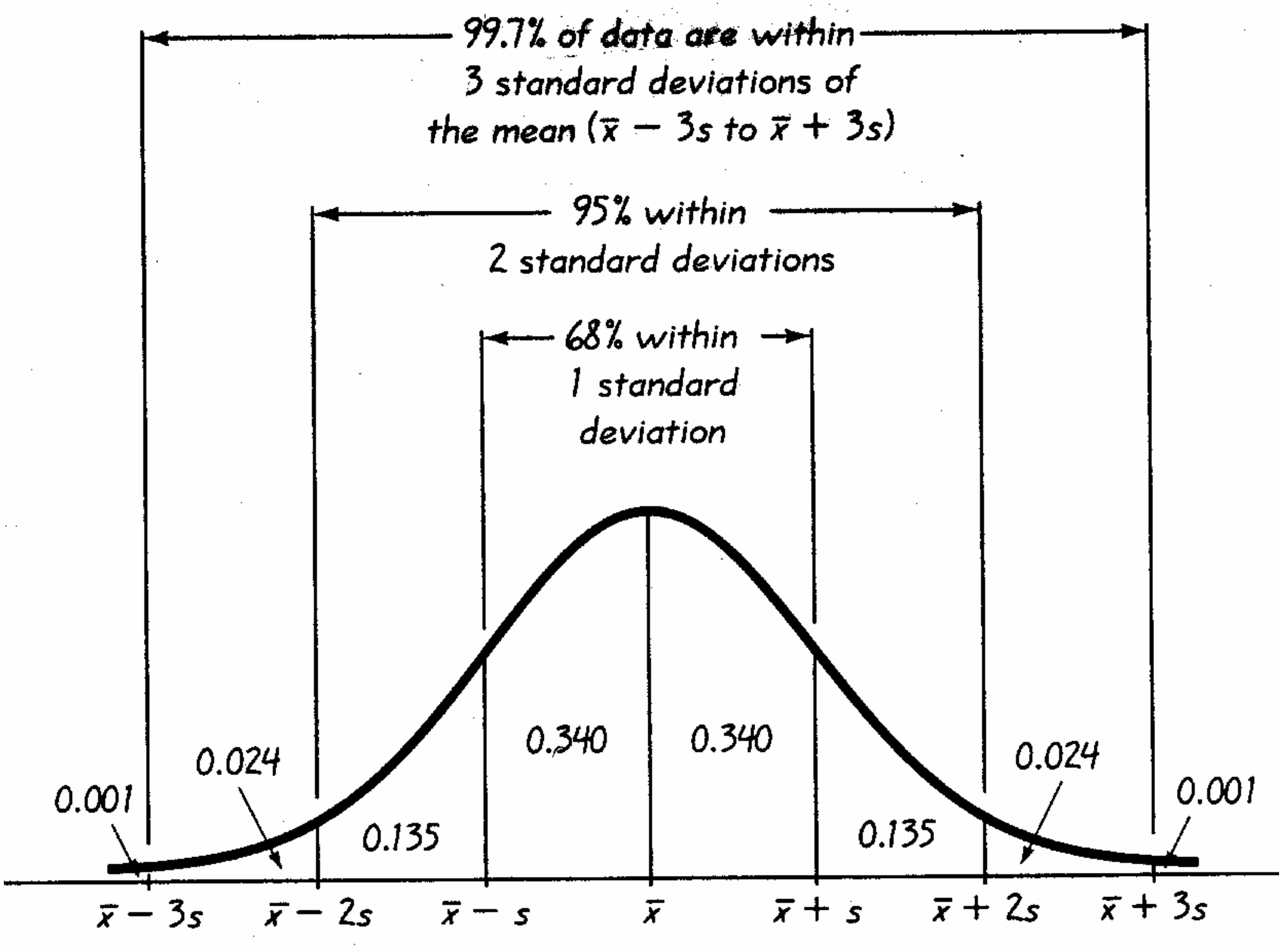
P(z > a)

P (z ≤ a)

P(a < z < b)



Arti dari σ



The Central Limit Theorem

Fungsi Gaussian memiliki sifat yang unik, yakni hasil penjumlahan dua atau lebih fungsi Gaussian akan merupakan fungsi Gaussian juga. Sehingga suatu fungsi Gaussian dapat dipandang sebagai hasil penjumlahan dari beberapa sumber yang juga merupakan fungsi Gaussian.

Untuk sejumlah n peubah acak x_i yang terpisah dengan variansi σ_i^2,

$$y = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Dalam batas limit $n \to \infty$, y adalah fungsi Gaussian dengan

$$E[y] = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \qquad V[y] = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2$$

Kesalahan pengukuran sering merupakan hasil dari beberapa sumber.

Beberapa macam distribusi probabilitas lainnya

Distribusi/pdf	Contoh penggunaan
Binomial	
Multinomial	
Poisson	
Uniform	
Exponential	
Gaussian	
Chi-square	
Cauchy	
Landau	

Distribusi Multinomial

Seperti binomial tetapi dengan *m* (>2) keluaran

$$\vec{p} = (p_1, \ldots, p_m), \quad \text{with} \sum_{i=1}^{m} p_i = 1 .$$

Jika dalam N percobaan:

n_1 keluaran dengan p_1,
n_2 keluaran dengan p_2,
…
n_m keluaran dengan p_m.

Distribusi probabilitas multinomial untuk $\vec{n} = (n_1, \ldots, n_m)$

$$f(\vec{n}; N, \vec{p}) = \frac{N!}{n_1! n_2! \cdots n_m!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_m^{n_m}$$

$$E[n_i] = Np_i, \quad V[n_i] = Np_i(1 - p_i)$$

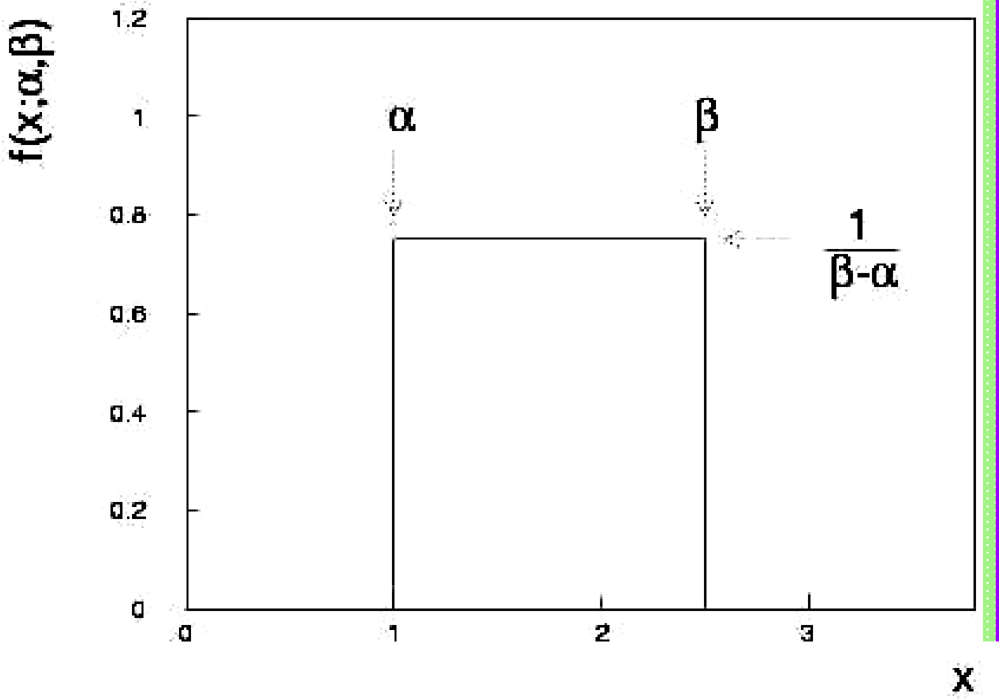
Distribusi Uniform

Tinjau peubah acak kontinyu x dengan $-\infty < x < \infty$. Pdf uniform:

$$f(x;\alpha,\beta) = \begin{cases} \frac{1}{\beta-\alpha} & \alpha \le x \le \beta \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$E[x] = \frac{1}{2}(\alpha+\beta)$$

$$V[x] = \frac{1}{12}(\beta-\alpha)^2$$

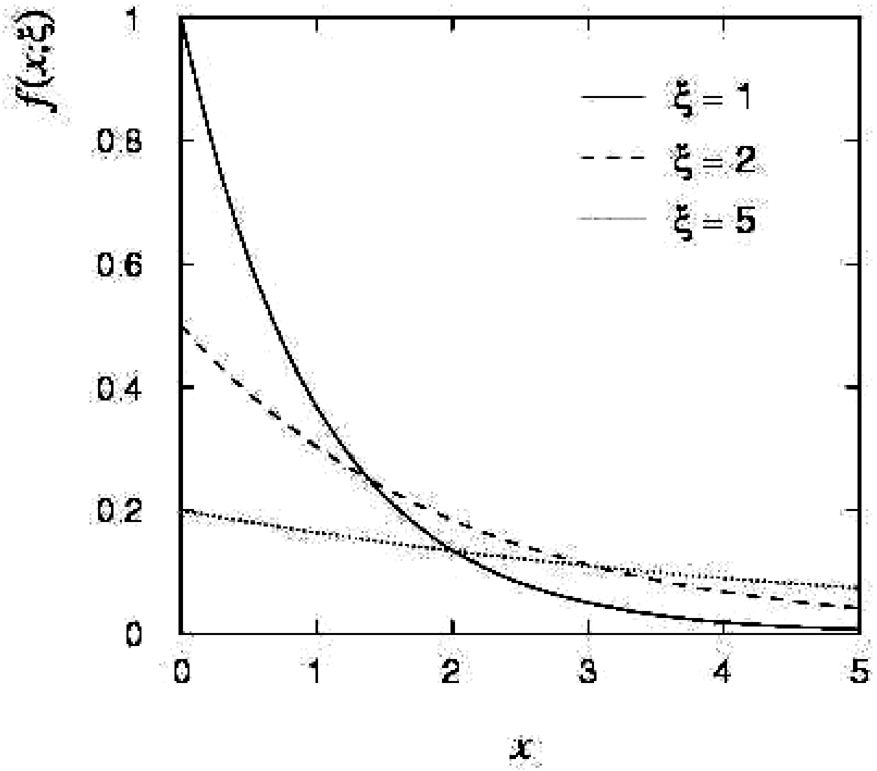


Distribusi Exponensial

$$f(x;\xi) = \begin{cases} \frac{1}{\xi} e^{-x/\xi} & x \geq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$E[x] = \xi$$

$$V[x] = \xi^2$$



Contoh: waktu paruh dari suatu partikel meta-stabil

$$f(t;\tau) = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau}$$ (τ = waktu paruh rata-rata)

Distribusi Poisson

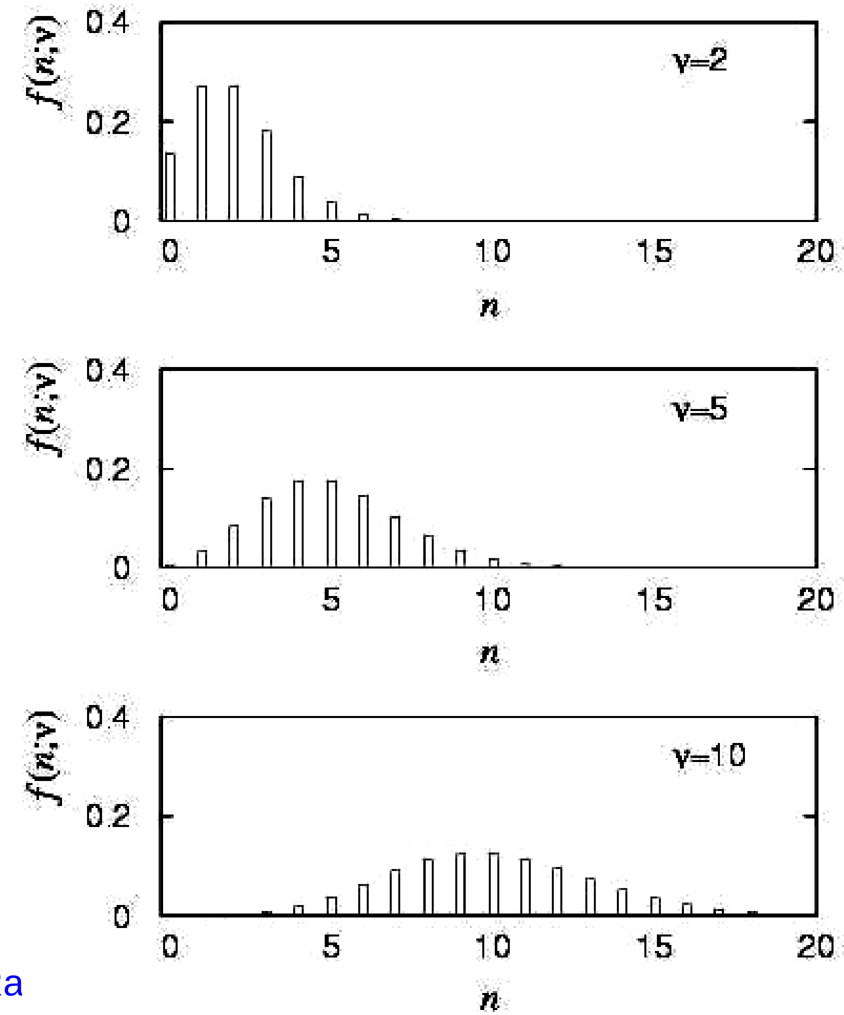
Tinjau kasus binomial dengan batasan limit

$$N \to \infty, \qquad p \to 0, \qquad E[n] = Np \to \nu \; .$$

→ fungsi distribusi akan memiliki bentuk distribusi Poisson:

$$f(n;\nu) = \frac{\nu^n}{n!} e^{-\nu} \qquad (n \geq 0)$$

$$E[n] = \nu \, , \qquad V[n] = \nu \; .$$



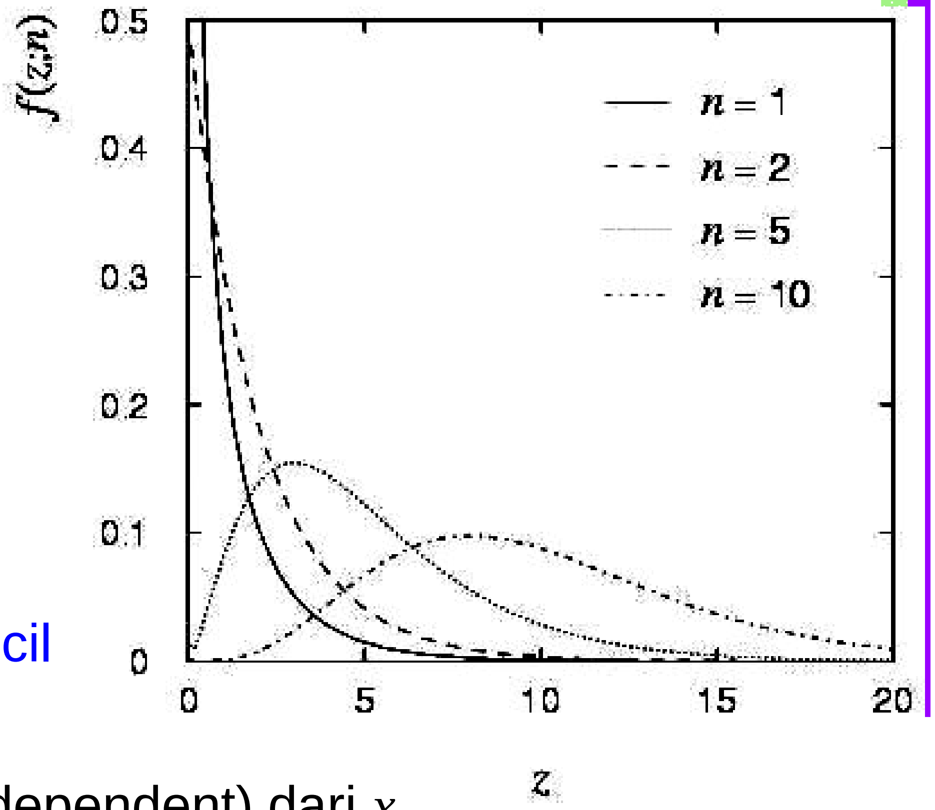
Distribusi Chi-square (χ^2)

Untuk peubah acak kontinyu z ($z \geq 0$):

$$f(z;n) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} z^{n/2-1} e^{-z/2}$$

n = 1, 2, ... = derajad kebebasan

$$E[z] = n\,, \qquad V[z] = 2n\,.$$



Distribusi ini sering dipakai untuk menilai hasil fitting dengan metoda kuadrat terkecil (least squares)

Untuk fungsi Gaussian yang terpisah (independent) dari x_i, dengan i = 1, ..., n, nilai rata-rata μ_i, dan variansi σ_i^2,

$$z = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \mu_i)^2}{\sigma_i^2}$$

merupakan χ^2 pdf dengan n derajad kebebasan

Fungsi probabilitas lainnya

Jika keluaran eksperimen ternyata bergantung dari beberapa peubah acak diskrit, mis. *X* dan *Y*, pdf-nya didefinisikan sebagai

→ joint pdf $$f(x,y) = P(X = x, Y = y)$$

dengan sifat-sifat:

$$f(x,y) \geq 0$$

$$\sum_x \sum_y f(x,y) = 1 \qquad \text{untuk semua } (x,y)$$

Untuk peubah acak kontinyu, mis. *X* dan *Y*, pdf-nya didefinisikan sebagai

→ joint pdf $$\int\int f(x,y)\,dx\,dy = P(x \leq X \leq x+dx, y \leq Y \leq y+dy)$$

dengan sifat-sifat:

$$f(x,y) \geq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) = 1 \qquad \text{untuk semua } (x,y)$$

Pdf marginal, independen, dan bersyarat

Jika diinginkan pdf hanya salah satu peubah acak, *X* atau *Y*,

$\rightarrow$ pdf marginal

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dy \qquad h(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dx$$

Jika *X* dan *Y* independen

$\rightarrow$ pdf independen $\qquad f(x, y) = g(x)\,h(y)$

Jika *X* dan *Y* tidak independen

$\rightarrow$ pdf bersyarat

$$f(x|y) = \frac{f(x, y)}{h(y)} \qquad f(y|x) = \frac{f(x, y)}{g(x)}$$