Dasar-Dasar Probabilitas

Ruang Sampel, Titik Sampel dan Kejadian

- Ruang sampel (*sample space*) atau semesta (*universe*) merupakan himpunan dari semua hasil (*outcome*) yang mungkin dari suatu percobaan (*experiment*)
- Titik sampel (*sample point*) merupakan tiap anggota atau elemen dari ruang sampel
- Kejadian (*event*) merupakan himpunan bagian dari ruang sampel

Contoh Percobaan, Ruang Sampel dan Kejadian (#1)

- Percobaan: Pelemparan sebuah dadu dan mencatat angka yang muncul
- Ruang sampel

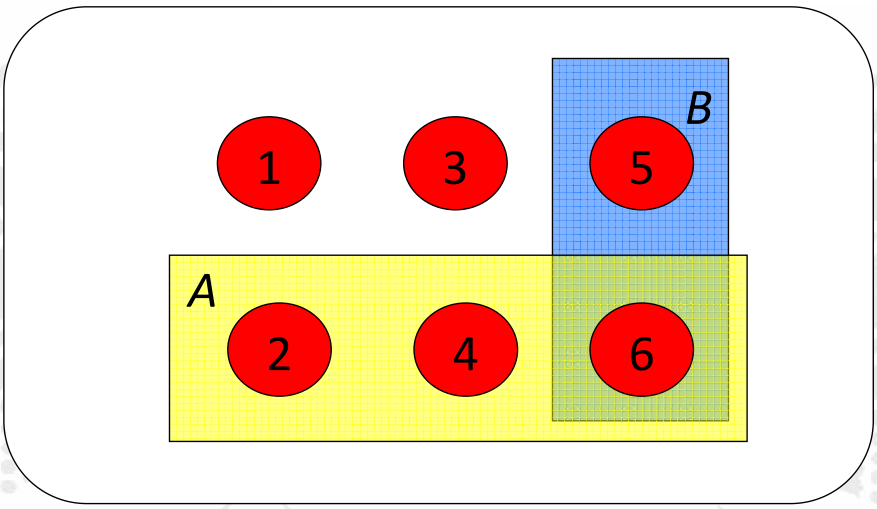
  $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- A = Kejadian munculnya angka genap

  $A = \{2, 4, 6\}$
- B = Kejadian munculnya angka 5 atau lebih

  $B = \{5, 6\}$

Ilustrasi Ruang Sampel, Titik Sampel dan Kejadian pada Percobaan Perlemparan Sebuah Dadu

Ruang sampel



Contoh Percobaan, Ruang Sampel dan Kejadian (#2)

- Percobaan: Pelemparan dua buah dadu bersamaan dan mencatat angka yang muncul
- Ruang sampel

  S = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), ..., (6, 6)}
- A = Kejadian munculnya angka yang sama pada kedua dadu

  A = {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)}
- B = Kejadian munculnya jumlah angka 10 atau lebih

  B = {(4, 6), (5, 5), (5, 6), (6, 4), (6, 5), (6, 6) }

Contoh Percobaan, Ruang Sampel dan Kejadian (#3)

- Percobaan: Pelemparan tiga koin (uang logam) bersamaan dan mencatat banyaknya muka yang muncul
- Ruang sampel

  S = {0, 1, 2, 3}
- A = Kejadian tidak ada muka yang muncul

  A = {0}
- B = Kejadian banyaknya muka yang muncul 2 atau kurang

  B = {0, 1, 2}

Contoh Percobaan, Ruang Sampel dan Kejadian (#4)

- Percobaan: Pengamatan terhadap umur (dalam jam) sebuah lampu
- Ruang sampel

  $S = \{t | t > 0\}$
- A = Kejadian umur lampu melebihi 10 jam

  $E = \{t | t > 10\}$
- B = Kejadian umur lampu antara 0 dan 250 jam

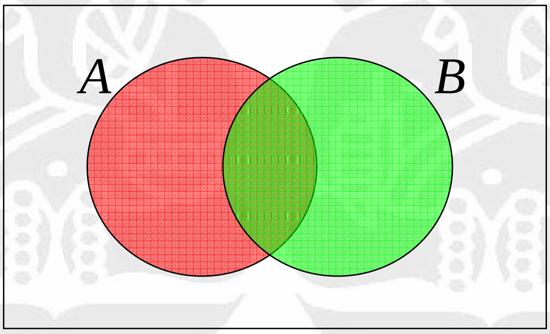
  $F = \{t | 0 \le t \le 250\}$

Operasi-Operasi dalam Kejadian

- Irisan (*Intersection*)
- Gabungan (*Union*)
- Komplemen (*Complement*)

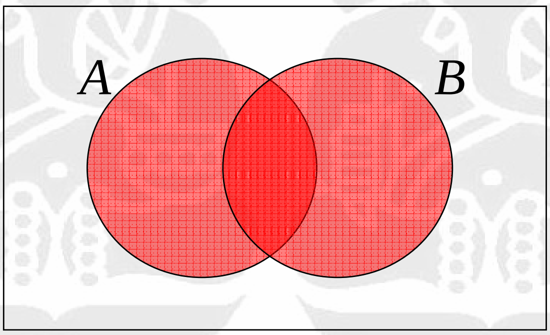
Irisan Dua Kejadian

Irisan dua kejadian *A* dan *B*, dinyatakan dengan $A \cap B$, merupakan kejadian yang elemennya termasuk dalam *A* dan *B*



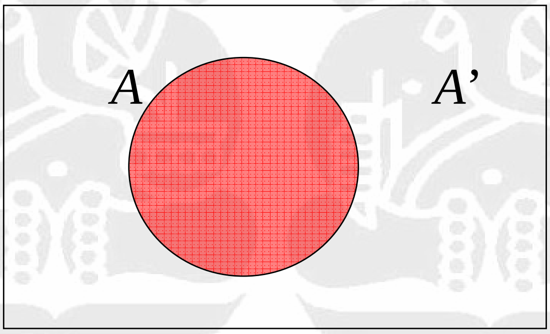
Gabungan Dua Kejadian

Gabungan dua kejadian *A* dan *B*, dinyatakan dengan $A \cup B$, merupakan kejadian yang mengandung semua elemen yang termasuk *A* atau *B* atau keduanya



Komplemen Suatu Kejadian

Komplemen suatu kejadian A, dinyatakan dengan A', adalah himpunan semua elemen dalam S yang tidak termasuk dalam A

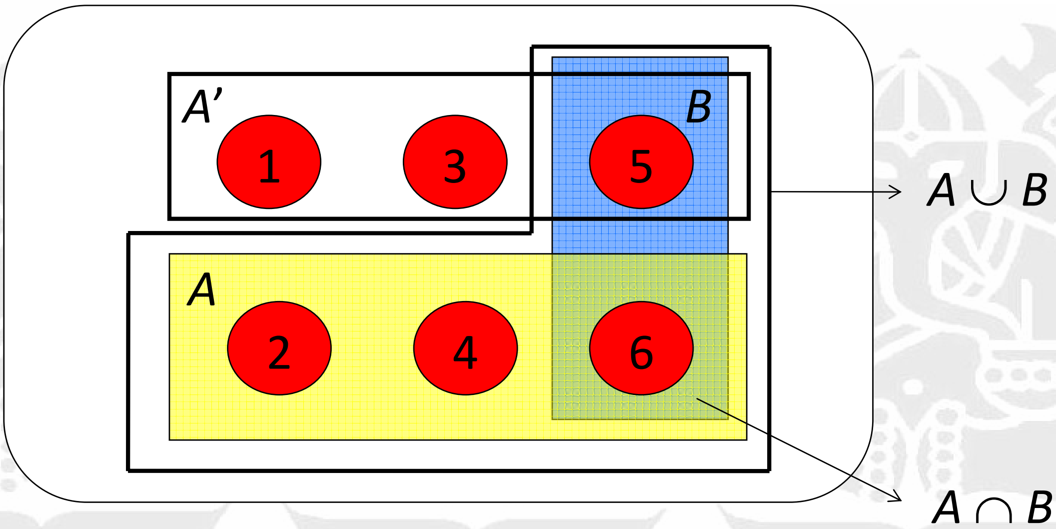


Contoh Operasi-Operasi dalam Kejadian

- Percobaan: Pelemparan sebuah dadu dan mencatat angka yang muncul
- Ruang sampel
  $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- Kejadian munculnya angka genap, A
  $A = \{2, 4, 6\}$
- Kejadian munculnya angka 5 atau lebih, B
  $B = \{5, 6\}$
- Irisan A dan B
  $A \cap B = \{6\}$
- Gabungan A dan B
  $A \cup B = \{2, 4, 5, 6\}$
- Komplemen dari A
  $A' = \{1, 3, 5\}$

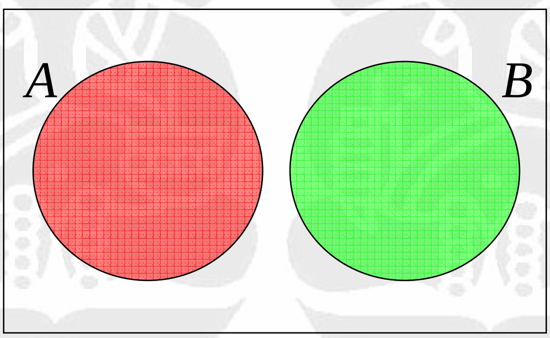
Ilustrasi Operasi-Operasi Kejadian pada Pelemparan Sebuah Dadu

Ruang sampel



Dua Kejadian Saling Terpisah

Dua kejadian *A* dan *B* dikatakan saling terpisah (*mutually exclusive*) jika kejadian-kejadian tersebut tidak dapat terjadi secara bersamaan



$$A \cap B = \varnothing$$

Contoh Kejadian-Kejadian Saling Terpisah

- Percobaan: Pelemparan sebuah dadu dan mencatat angka yang muncul
- Ruang sampel

  $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- Kejadian munculnya angka genap, *A*

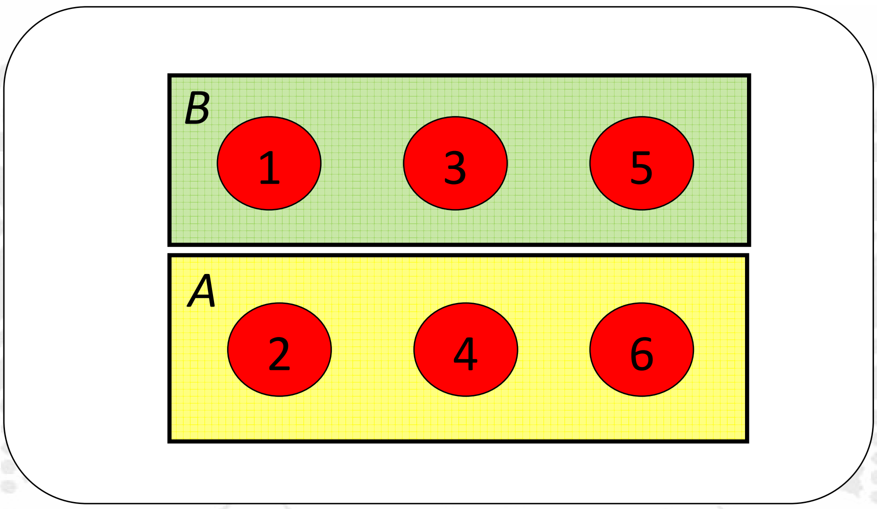
  $A = \{2, 4, 6\}$
- Kejadian munculnya angka ganjil, *B*

  $B = \{1, 3, 5\}$
- Kejadian *A* dan *B* saling terpisah

  $A \cap B = \varnothing$

Ilustrasi Dua Kejadian Saling Terpisah pada Pelemparan Sebuah Dadu

Ruang sampel



Penghitungan Titik Sampel

- Jika suatu operasi dapat dilakukan dengan n_1 cara, dan bila untuk setiap cara ini operasi kedua dapat dilakukan dengan n_2 cara, dan bila untuk setiap cara ini operasi ketiga dapat dilakukan dengan n_3 cara, dst, maka deretan k operasi dapat dilakukan dengan $n_1 n_2 ... n_k$ cara

Contoh Penghitungan Titik Sampel

Tiga buah koin (uang logam) dilemparkan sekali.

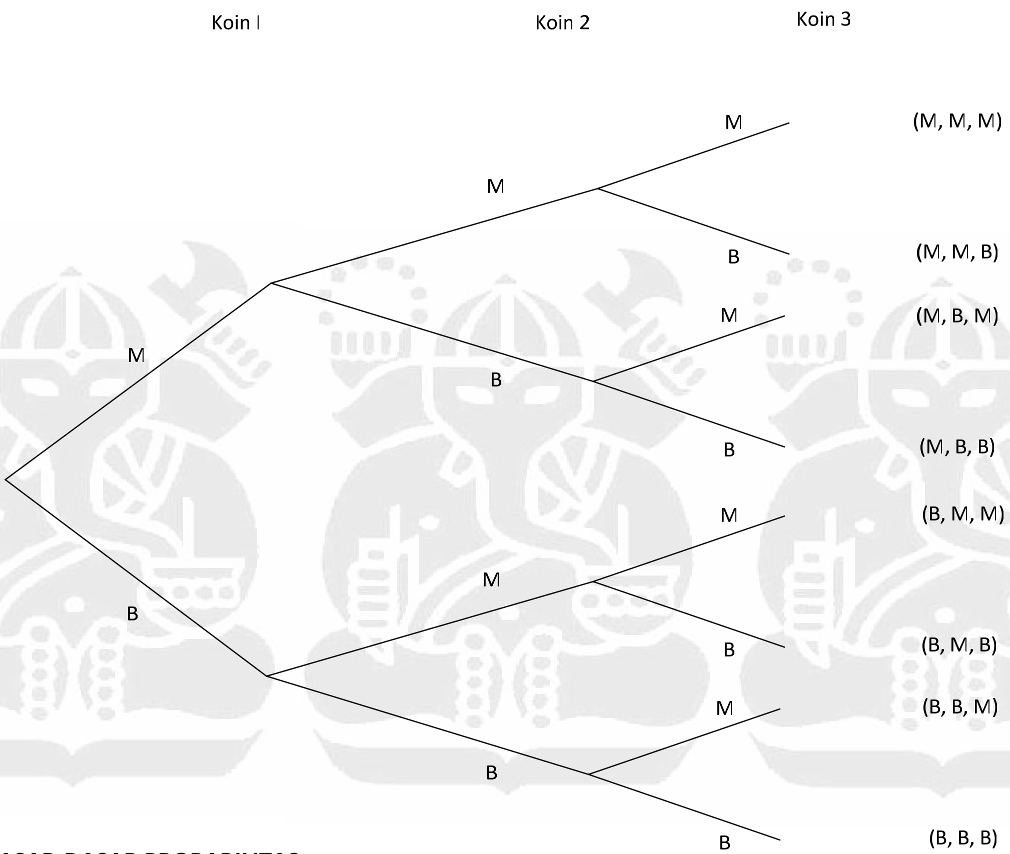
Banyaknya titik sampel dalam ruang sampel ?

Koin I dapat menghasilkan 2 hasil yang mungkin, muka (M) atau belakang (B)

Untuk tiap hasil, Koin II dapat menghasilkan 2 hasil yang mungkin, M atau B

Untuk tiap hasil, Koin III dapat menghasilkan 2 hasil yang mungkin, M atau B

Jumlah titik sampel yang dihasilkan = (2)(2)(2) = 8



Permutasi & Kombinasi

- Permutasi (*Permutation*)

  Permutasi merupakan susunan dari suatu himpunan obyek yang dapat dibentuk yang memperhatikan urutan

- Kombinasi (*Combination*)

  Kombinasi merupakan susunan dari suatu himpunan obyek yang dapat dibentuk tanpa memperhatikan urutan

Permutasi (1)

- Banyaknya permutasi *n* obyek berlainan adalah *n*!
- Banyaknya permutasi *n* obyek berlainan bila diambil *r* sekaligus

$$\mathrm{P}_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

- Banyaknya permutasi *n* benda berlainan yang disusun melingkar adalah (*n* – 1)!

Permutasi (2)

- Banyaknya permutasi yang berlainan dari *n* obyek bila n_1 adalah jumlah obyek jenis pertama, n_2 adalah jumlah obyek jenis kedua, ..., n_k jumlah obyek ke-*k* adalah

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$$

Permutasi (3)

- Banyaknya cara menyekat *n* obyek dalam *r* sel bila masing-masing berisi n_1 obyek pada sel pertama, n_2 obyek pada sel kedua, dan seterusnya adalah

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_r!}$$

dengan $n_1 + n_2 + \ldots + n_r = n$

Kombinasi (1)

- Kombinasi berkaitan dengan penentuan banyaknya cara memilih *r* obyek dari sejumlah *n* obyek tanpa memperhatikan urutannya.
- Kombinasi merupakan sekatan dengan dua sel, sel pertama berisi *r* obyek yang dipilih dan $(n - r)$ obyek sisanya.

Kombinasi (2)

- Jumlah kombinasi dari *n* obyek yang berlainan jika diambil sebanyak *r*

$$C_r^n = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Contoh Kombinasi

Suatu kelas terdiri atas 4 pria dan 3 wanita

Banyaknya panita yang dibentuk yang beranggotakan 2 pria dan 1 wanita?

Banyaknya cara memilih 2 dari 4 pria = $C_2^4 = \frac{4!}{2!2!} = 6$

Banyaknya cara memilih 1 dari 3 wanita = $C_1^3 = \frac{3!}{1!2!} = 3$

Banyaknya panita yang dapat dibentuk = (6)(3) = 18

Probabilitas Kejadian

- Probabilitas suatu kejadian merupakan suatu ukuran kemungkinan kejadian tersebut terjadi
- Probabilitas kejadian *A* dinyatakan dengan $P(A)$

Aksioma-Aksioma Probabilitas Kejadian

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

$$P(\varnothing) = 0$$

$$P(S) = 1$$

Probabilitas untuk Hasil Berkemungkinan Sama

Jika suatu percobaan dapat menghasilkan *N* macam hasil yang berkemungkinan sama (*equally likely*) dan jika tepat terdapat sebanyak *n* hasil yang berkaitan dengan kejadian *A*, maka probabilitas kejadian *A* adalah

$$P(A) = \frac{n}{N}$$

Contoh Probabilitas untuk Hasil Berkemungkinan Sama (#1)

Percobaan pelemparan sebuah dadu

Misal *A* kejadian munculnya angka genap

Jumlah seluruh hasil yang mungkin $N = 6$

Jumlah hasil yang mungkin untuk kejadian *A*, $n = 3$

Probabilitas kejadian *A*, $P(A)$?

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Contoh Probabilitas untuk Hasil Berkemungkinan Sama (#2)

Percobaan pengambilan selembar kartu dari 52 kartu bridge.

Misal *B* kejadian terpilihnya kartu *heart*

Jumlah seluruh hasil yang mungkin *N* = 52

Jumlah hasil yang mungkin untuk kejadian *B*, *n* = 13

Probabilitas kejadian *B*, *P*(*B*) ?

$$P(B) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

Contoh Probabilitas untuk Hasil Berkemungkinan Sama (#3)

Dalam suatu kotak, terdapat 4 bola merah dan 6 bola putih.

Jika empat bola diambil secara random, probabilitas terpilih 2 bola merah dan 2 bola putih?

A = kejadian terpilih 2 bola merah dan 2 bola putih

Jumlah cara memilih 2 dari 4 bola merah = $C_2^4 = \frac{4!}{2!2!} = 6$

Jumlah cara memilih 2 dari 6 bola putih = $C_2^6 = \frac{6!}{2!4!} = 15$

Jumlah cara memilih 4 dari 10 bola = $C_4^{10} = \frac{10!}{4!6!} = 210$

$$P(A) = \frac{(6)(15)}{(210)} = \frac{3}{7}$$

Hukum-Hukum Probabilitas

- Jika A dan B dua kejadian sembarang, maka

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

- Jika A dan B kejadian yang saling terpisah, maka

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

- Jika A dan A' adalah kejadian saling berkomplemen, maka

$$P(A') = 1 - P(A)$$

Probabilitas Bersyarat

Probabilitas bersyarat (*conditional probability*) B jika diketahui A

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}; \text{ jika } P(A) > 0$$

Kejadian A dan B dapat terjadi pada suatu percobaan

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B)$$

Contoh Probabilitas Bersyarat (#1)

	Bekerja	Tak Bekerja
Pria	460	40
Wanita	140	260

M = pria terpilih

E = orang terpilih berstatus bekerja

$$P(E)=\frac{600}{900}=\frac{2}{3}$$

$$P(E\cap M)=\frac{460}{900}=\frac{23}{45}$$

$$P(M|E)=\frac{23/45}{2/3}=\frac{23}{30}$$

Contoh Probabilitas Bersyarat (#2)

Diberikan sekumpulan kartu bridge yang terdiri atas 52 kartu.

Dua buah kartu diambil satu per satu tanpa pengembalian

Probabilitas kartu heart terpilih pada dua pengambilan ?

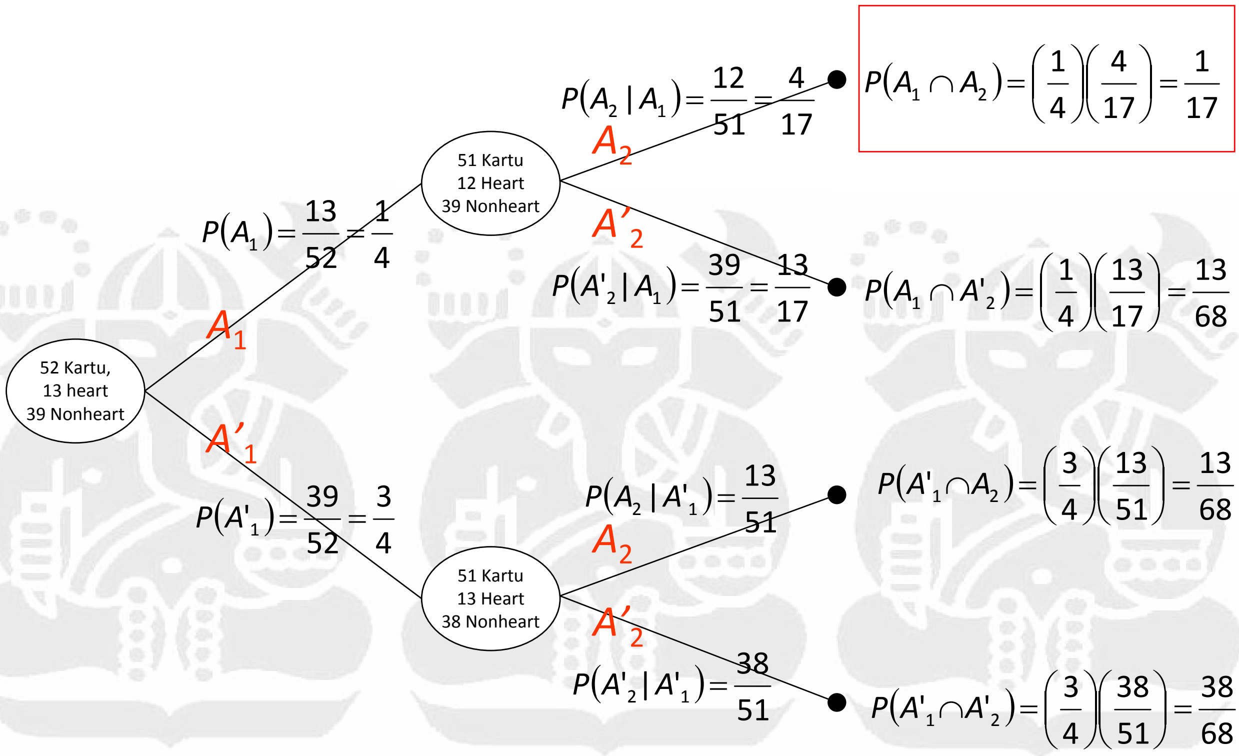
A_1 = kejadian kartu heart yang terambil pada pengambilan I

A_2 = kejadian kartu heart yang terambil pada pengambilan II

$$P(A_1)=\frac{13}{52}=\frac{1}{4}$$

$$P(A_2)=\frac{12}{51}=\frac{4}{17}$$

$$P(A_1\cap A_2)=\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{4}{17}\right)=\frac{1}{17}$$



Contoh Probabilitas Bersyarat (#3)

Kotak pertama terdiri atas 4 bola putih dan 3 bola hitam, dan kotak kedua terdiri atas 3 bola putih dan 5 bola hitam.

Sebuah bola diambil dari kotak pertama dan ditempatkan (tanpa terlihat) ke kotak kedua.

Probabilitas bahwa sebuah yang diambil dari kotak kedua adalah hitam?

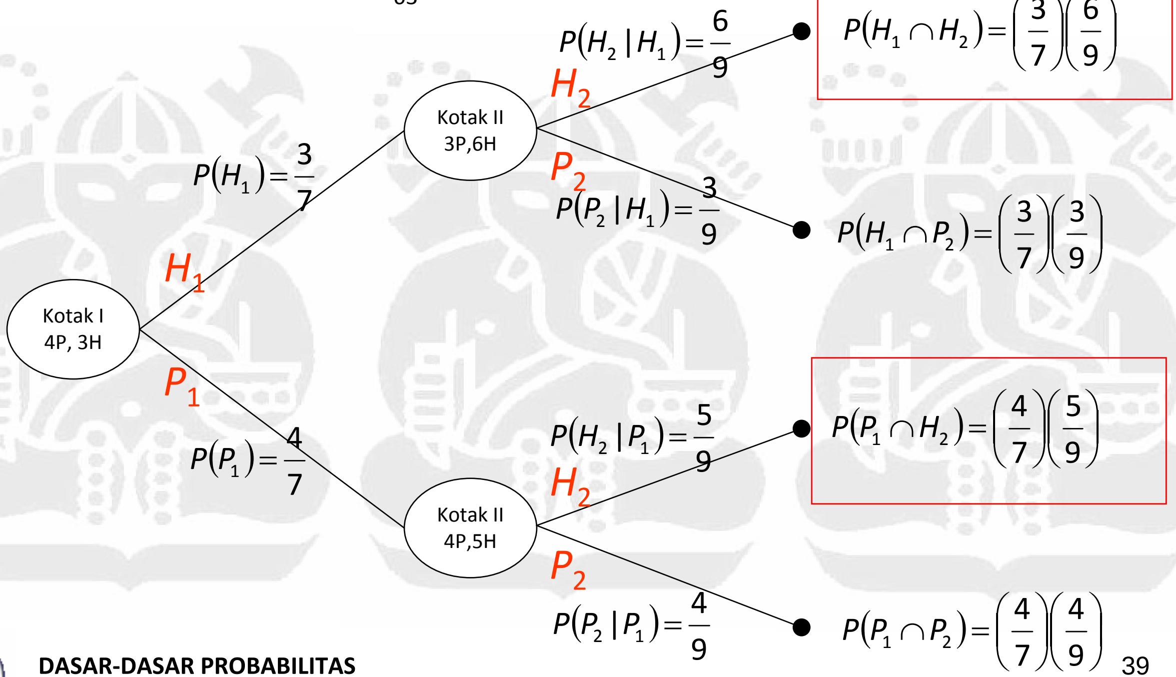
H_1 = kejadian bola hitam yang terpilih dari kotak I

P_1 = kejadian bola putih yang terpilih dari kotak I

H_2 = kejadian bola hitam yang terpilih dari kotak II

P_2 = kejadian bola putih yang terpilih dari kotak II

$$
\begin{aligned}
P[(H_1 \cap H_2) \cup (P_1 \cap H_2)] &= P(H_1 \cap H_2) + P(P_1 \cap H_2) \\
&= P(H_1)P(H_2 \mid H_1) + P(P_1)P(H_2 \mid P_1) \\
&= \left(\tfrac{3}{7}\right)\left(\tfrac{6}{9}\right) + \left(\tfrac{4}{7}\right)\left(\tfrac{5}{9}\right) \\
&= \tfrac{38}{63}
\end{aligned}
$$



Kejadian-Kejadian Saling Bebas

- Kejadian-kejadian *A* dan *B* saling bebas (*independent*) jika

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Contoh Kejadian-Kejadian Bebas (#1)

Diberikan sekumpulan kartu bridge yang terdiri atas 52 kartu. Dua buah kartu diambil satu per satu dengan pengembalian Probabilitas kartu heart terpilih pada dua pengambilan ?

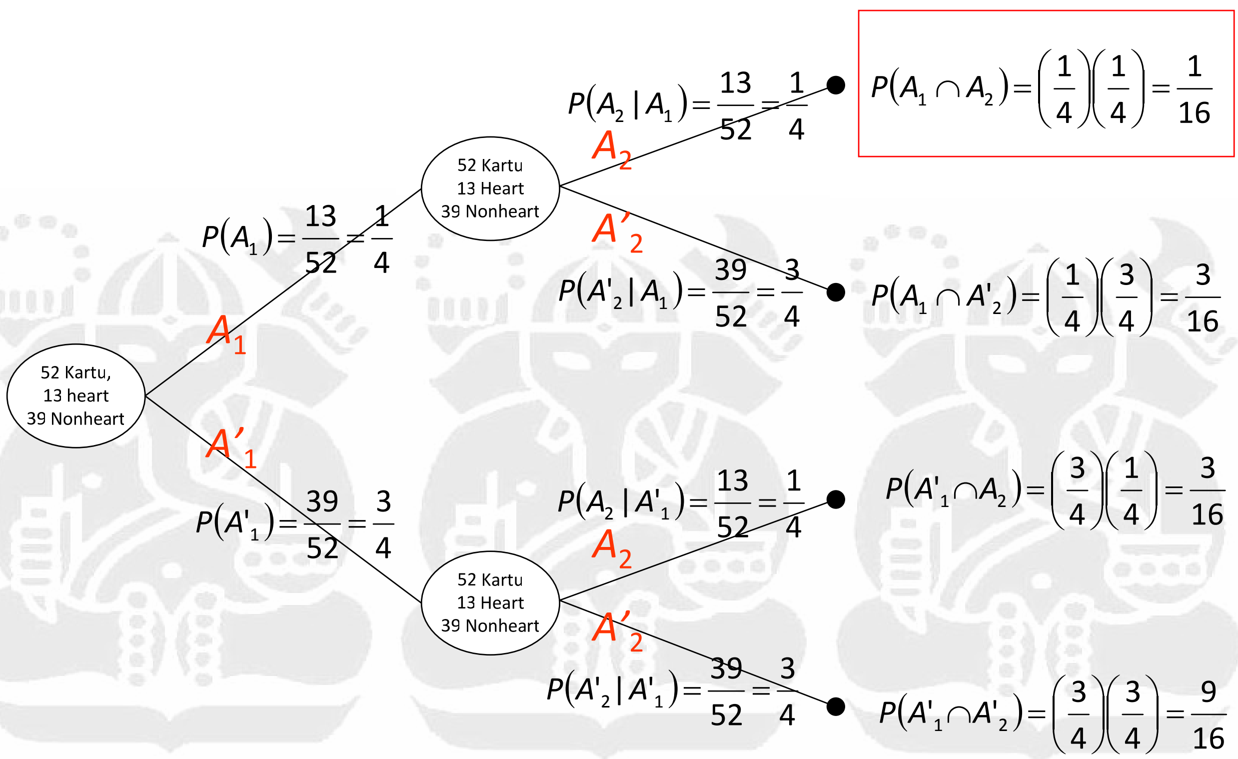
A_1 = kejadian kartu heart yang terambil pada pengambilan I

A_2 = kejadian kartu heart yang terambil pada pengambilan II

$$P(A_1) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

$$P(A_2) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

$$P(A_1 \cap A_2) = \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{16}$$



Contoh Kejadian-Kejadian Bebas (#2)

Sebuah koin (uang logam) yang seimbang dilempar tiga kali.
Probabilitas mendapatkan 2 muka (M) dan 1 belakang (B) ?

Ruang sampel

S = {MMM, MMB, MBM, MBB, BMM, BMB, BBM, BBB}

A = kejadian muncul 2 M dan 1 B

A = {MMB, MBM, BMM}

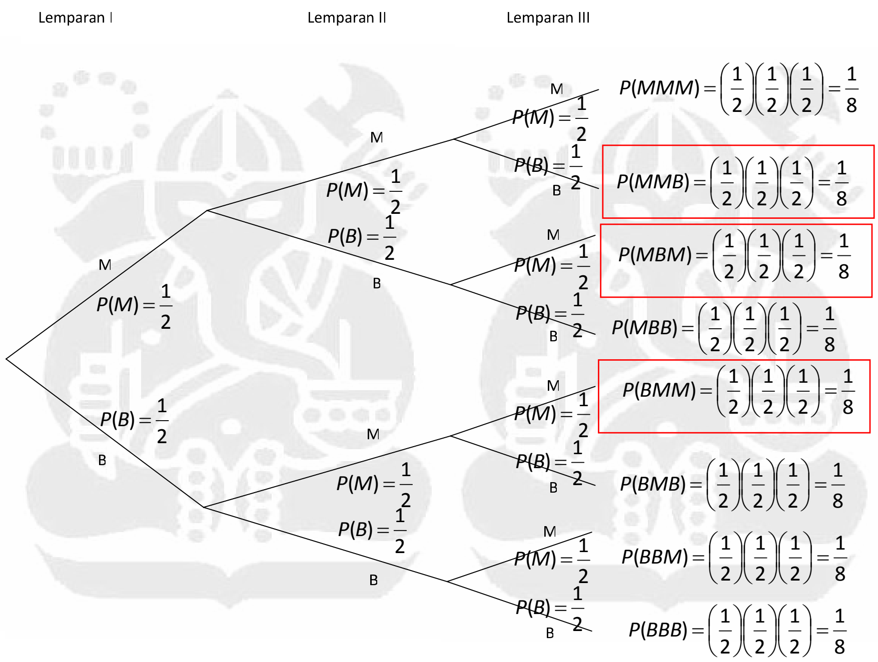
P(*A*) = *P*(MMB) + *P*(MBM) + *P*(BMM)

$$P(MMB) = P(M \cap M \cap B) = P(M)P(M)P(B) = \left(\tfrac{1}{2}\right)\left(\tfrac{1}{2}\right)\left(\tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{1}{8}$$

$$P(MBM) = P(M \cap B \cap M) = P(M)P(B)P(M) = \left(\tfrac{1}{2}\right)\left(\tfrac{1}{2}\right)\left(\tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{1}{8}$$

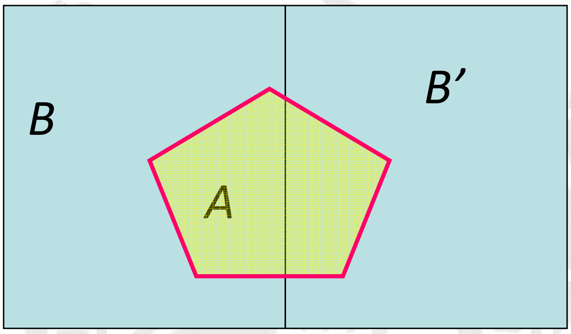
$$P(BMM) = P(B \cap M \cap M) = P(B)P(M)P(M) = \left(\tfrac{1}{2}\right)\left(\tfrac{1}{2}\right)\left(\tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{1}{8}$$

$$P(A) = \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} = \tfrac{3}{8}$$



Aturan Bayes (1)

$$P(B|A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}$$



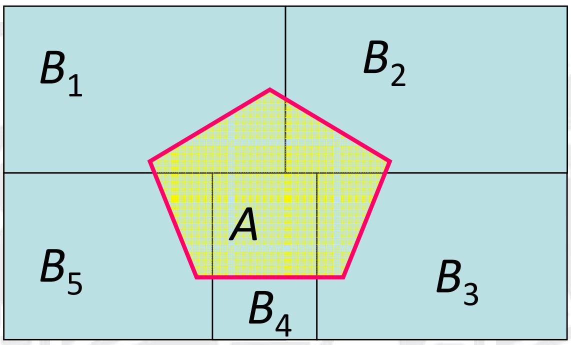
$$A=(B\cap A)\cup(B'\cap A)$$

$$P(A)=P(B\cap A)+P(B'\cap A)$$

$$P(B|A)=\frac{P(B\cap A)}{P(B\cap A)+P(B'\cap A)}$$

$$=\frac{P(B)P(A|B)}{P(B)P(A|B)+P(B')P(A|B')}$$

Aturan Bayes (2)



$$P(B_i|A)=\frac{P(B_i\cap A)}{\sum_{i=1}^{n}P(B_i\cap A)}$$

$$=\frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|B_i)}$$

Contoh Aturan Bayes

Dua orang dicalonkan menjadi Bupati.
Probabilitas Pak Anu terpilih adalah 0,6; $P(A_1) = 0{,}6$.
Probabilitas Pak Badu terpilih adalah 0,4; $P(A_2) = 0{,}4$.
Jika Pak Anu terpilih, probabilitas kenaikan pajak adalah 0,8; $P(B_1/A_1) = 0{,}8$.
Jika Pak Badu terpilih, probabilitas kenaikan pajak adalah 0,1; $P(B_1/A_2) = 0{,}1$.
Jika ternyata diketahui terjadi kenaikan pajak, probabilitas bahwa Pak Badu yang terpilih, $P(A_2|B_1)$

$$
\begin{aligned}
P(A_2 \mid B_1) &= \frac{P(A_2 \cap B_1)}{P(A_1 \cap B_1) + P(A_2 \cap B_1)} \\
&= \frac{P(A_2)P(B_1 \mid A_2)}{P(A_1)P(B_1 \mid A_1) + P(A_2)P(B_1 \mid A_2)} \\
&= \frac{(0{,}4)(0{,}1)}{(0{,}6)(0{,}8) + (0{,}4)(0{,}1)} \\
&= 0{,}0769
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(A_2 \mid B_1) &= \frac{P(A_2 \cap B_1)}{P(B_1)} \\
&= \frac{P(A_2 \cap B)}{P(A_1 \cap B_1) + P(A_2 \cap B_1)} \\
&= \frac{0{,}04}{0{,}48 + 0{,}04} \\
&= 0{,}0769
\end{aligned}
$$