# TRANSFORMASI 3D

## 1. PENDAHULUAN

Transformasi 3D pada dasarnya hampir sama dengan transformasi 2D, hanya pada 3D kita menghitung sumbu Z. Sama seperti pada 2D, ada tiga transformasi dasar yang dapat dilakukan terhadap verteks, yaitu:

1. Translasi.
2. Pensekalaan.
3. Rotasi.

Titik hasil transformasi dapat diperoleh melalui rumus ***affine transformation***.

**Q = P * M + tr**

**Dimana:**

*Q: (Qx, Qy, Qz) menyatakan matrix 1x3 yang berisi titik hasil transformasi.*
*P: (Px, Py, Pz) menyatakan matrik 1x3 yang berisi titik yang akan ditransformasi.*
*tr: (trx, try, trz) menyatakan matriks 1x3 yang berisi banyaknya pergeseran sumbuk x,y, z.*
*M: Matriks transformasi berukuran 3x3 seperti berikut*

$$M = \begin{bmatrix} m_{00} & m_{01} & m_{02} \\ m_{10} & m_{11} & m_{12} \\ m_{20} & m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}$$

## 11.2. TRANSLASI

Translasi dilakukan dengan menggunakan matriks sebagai berikut:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Latihan:**

Diketahui sebuah titik **P(2,3,1)** dan titik ini digeser sejauh **tr =(2,2,0)**. Hitung lokasi titik hasil translasi.

**Jawab:**

Q = P * M + tr

$$Q = [2\ 3\ 1] * \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + [2\quad 2\quad 0]$$

Q = [2 3 1] + [2 2 0]
Q = [2+2    3+2   1+0]
Q = [4 5 1]

Dengan demikian titik **P(2,3,1)** digeser ke titik **Q(4,5,1)**

## 11.3. PENSKALAAN

Penskalaan dilakukan dengan mengisi tr = (0,0,0) dan matriks M diatur seperti beikut.

$$M = \begin{pmatrix} Sx & 0 & 0 \\ 0 & Sy & 0 \\ 0 & 0 & Sz \end{pmatrix}$$

**Latihan:**

Diketahui sebuah prisma dengan lokasi verteks seperti pada tabel beikut:

**Tabel 11.1.** *Lokasi verteks dari sebuah prisma*

| Vertex | X | Y | Z |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 2 | 2 | 0 | 1 |
| 3 | 2 | 0 | 2 |
| 4 | 1 | 0 | 2 |
| 5 | 1 | 1 | 1 |

Prisma tersebut akan diskala sebesar Sx=2, Sy=2, Sz = 2. Hitunglah lokasi verteks setelah di skala.

**Jawab:**

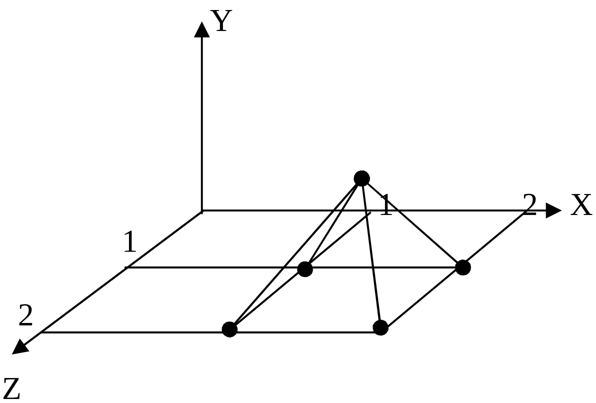
Lokasi verteks hasil penskalaan dapat diperoleh dengan matriks M:

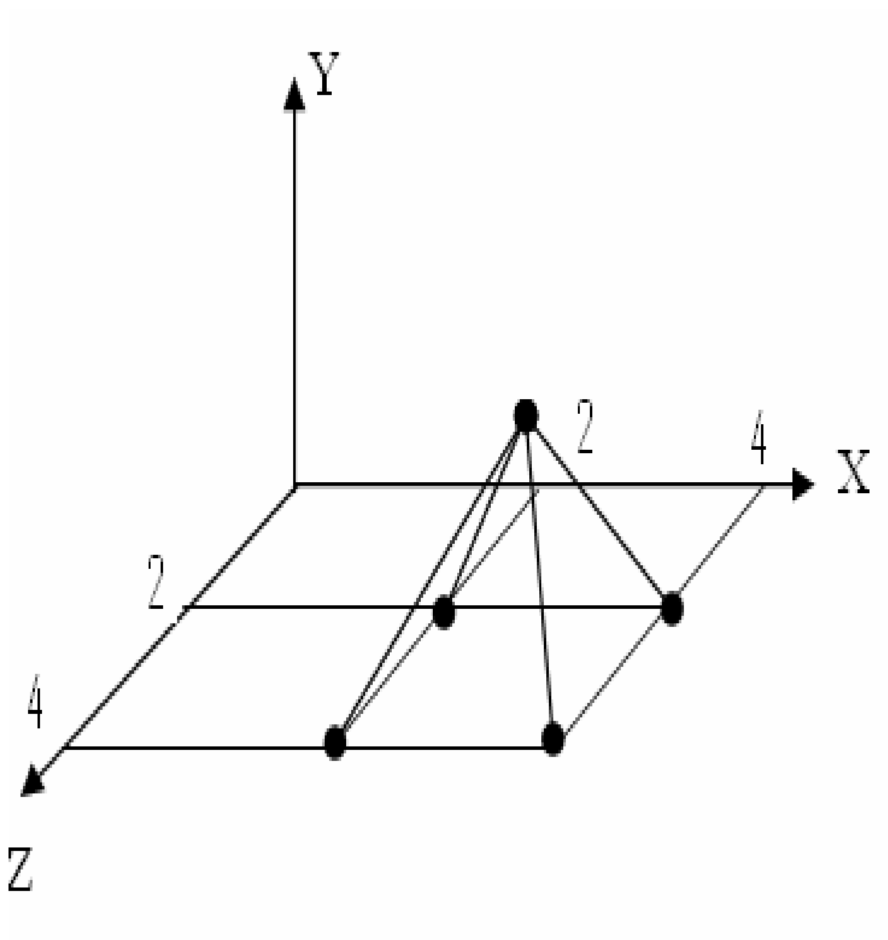
$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Hasil lengkap penskalaan ditunjukkan pada tabel berikut, dan gambar memperlihatkan benda sebelum dan sesudah dilakukan penskalaan.

**Tabel 11.2.** *Verteks hasil pensekalaan (2,2,2)*

| Vertex | X | Y | Z |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 0 | 2 |
| 2 | 4 | 0 | 0 |
| 3 | 4 | 0 | 4 |
| 4 | 0 | 0 | 4 |
| 5 | 2 | 4 | 2 |




**Gambar 11.1.** *hasil penskalaan*

Penskalaan dilakukan dengan menggunakan titik **pusat(0,0,0)**. Kita dapat melakukan pembesaran, pengecilan, pencerminan dengan mengatur **Sx**, **Sy**, **Sz** seperti pada tabel.

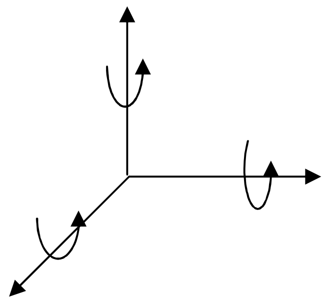
| Nilai | Keterangan |
|---|---|
| (Sx, Sy, Sz) > 1 | Pembesaran |
| (Sx, Sy, Sz) <-1 | Pembesaran dengan pencerminan |
| -1 > (Sx, Sy, Sz) < 1 | Pengecilan dengan / tanpa pencerminan |

## 11.4. ROTASI

Berbeda dengan rotasi di 2D yang menggunakan titik pusat(0,0) sebagai pusat perputaran, rotasi 3D menggunakan sumbu koordinat sebagai pusat perputaran. Dengan demikian ada 3 macam rotasi yang dapat dilakukan, yaitu:

1. Rotasi terhadap sumbu X
2. Rotasi terhadap sumbu Y
3. Rotasi terhadap sumbu Z

Rotasi terhadap sumbu X, Y, dan Z diperlihakan seperti pada gambar berikut



**Gambar 11.2.** *Rotasi dan sumbu rotasi*

Mengingat ada 3 buah sumbu rotasi maka matriks transformasi yang digunakan juga bergantung kepada sumbu putar. Adapun isi masing-masing transformasi sesuai dengan sumbu putar didefinisikan sebagai berikut.

$$m_{rx} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ 0 & -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

$$m_{ry} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & 0 & -\sin(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

$$m_{rz} \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ -\sin(a) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## 11.5. TRANSFORMASI BERTURUT-TURUT MENGGUNAKAN *HOMOGENEOUS TRANSFORMATION*

Transformasi berturut-turut dapat dilakukan dengan cara mengalikan matrik-matrik transformasi sesuai urutan transformasi. Untuk memudahkan perhitungan maka kita dapat menggunakan bentuk *homogeneous transformation*, yaitu dengan menggunakan matrik transformasi menjadi berukuran 4x4 seperti pada rumus berikut:

$$M_T = \begin{pmatrix} m_{00} & m_{01} & m_{02} & m_{03} \\ m_{10} & m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{20} & m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ tr_x & tr_y & tr_z & 1 \end{pmatrix}$$

Dengan demikian transformasi bertutut-turut yang menggunakan matrik $M_{T1}$, $M_{T2}$,...,$M_{Tm}$ dapat dirumuskan sebagai hasil dari perkalian matrik-matrik penyusun transformasi, yaitu:

$$M = M_{T1} * M_{T2} * \ldots * M_{Tm}$$
$$Q = P * M$$

Dimana P merupakan matrik 1x3 dengan isi seperti berikut:

$$P = [P_x \quad P_y \quad P_z \quad 1]$$

**Latihan:**

Titik **A(2,2,1)** akan ditransformasikan berturut-tururt sebagai berikut:

1. Translasi (2,3,2)
2. Skala(2,2,3)
3. Rotasi pada sumbu Z sebsar $45^o$

Hitunglah lokasi titik setelah ditransformasikan.

**Jawab:**

Hasil transformasi tersebut dapat dihitung sebagai berikut:

$$M_{TT} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{TS} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{TRz} = \begin{pmatrix} 0{,}7071 & 0{,}7071 & 0 & 0 \\ -0{,}7071 & 0{,}7071 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Sehingga:**

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0{,}7071 & 0{,}7071 & 0 & 0 \\ -0{,}7071 & 0{,}7071 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} \quad & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

**Maka:**

$$Q = [2 \;\; 2 \;\; 1 \;\; 1] \;\; * \begin{pmatrix} \quad & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

$$Q = [ \qquad\qquad\qquad ]$$

Dalam transformasi berturut-turut, urutan matriks transformasi akan menentukan lokasi akhir. Sebagai contoh apabila dilakukan tansformasi berturut-turut yang dimulai dengan translasi (2,3,1) dan diikuti dengan rotasi z sebesar $45^0$ akan menghasilkan matriks transformasi sebagai berikut:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0{,}7071 & 0{,}7071 & 0 & 0 \\ -0{,}7071 & 0{,}7071 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}7071 & 0{,}7071 & 0 & 0 \\ -0{,}7071 & 0{,}7071 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -0{,}7071 & 3{,}5355 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Tetapi transformasi yang diawali dengan rotasi pada sumbu z sebesar $45^o$ dan diikuti dengan translasi (2,3,1) yang akan menghasilkan matriks transformasi sebagai berikut:

$$M = \begin{pmatrix} 0{,}7071 & 0{,}7071 & 0 & 0 \\ -0{,}7071 & 0{,}7071 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}7071 & 0{,}7071 & 0 & 0 \\ -0{,}7071 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Perhatikan bahwa urutan transformasi yang berbeda akan menghasilkan matriks transformasi yang berbeda pula.