INTEGRAL NUMERIK

Merupakan limit suatu jumlah luas sampai diperoleh suatu ketelitian yang diijinkan.

Contoh :

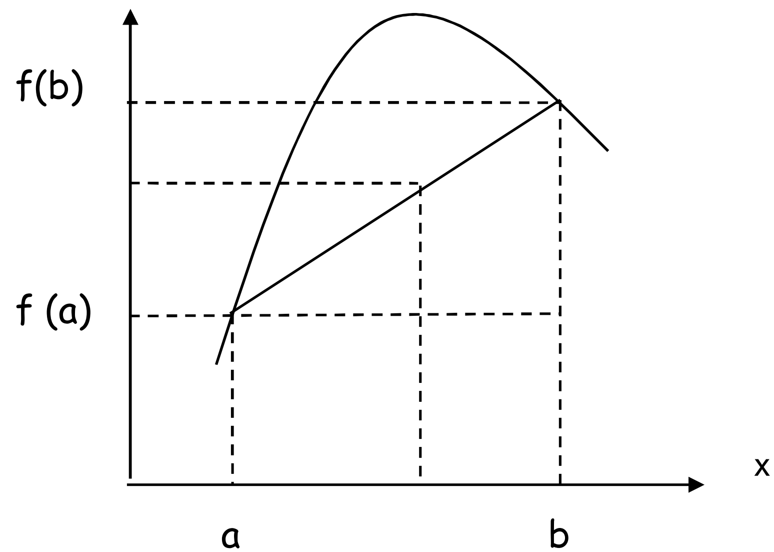
Evaluasi suatu integral dari suatu fungsi f(x) kontinue dalam x sepanjang suatu selang berhingga a dan b tertentu dimana a ≤ x ≤ b.

$$I = \int_a^b f(x).dx$$

1. **Metode Trapesium** .

Metode tarpesium merupakan metode Newton-Cotes order pertama. Dalam metode ini kurva lengkung dari fungsi *f(x)* digantikan oleh garis lurus.

Jika I = luas daerah di bawah kurva, maka dapat dihampiri dengan luas trapesium yang teletak di bawah kurva f(x).



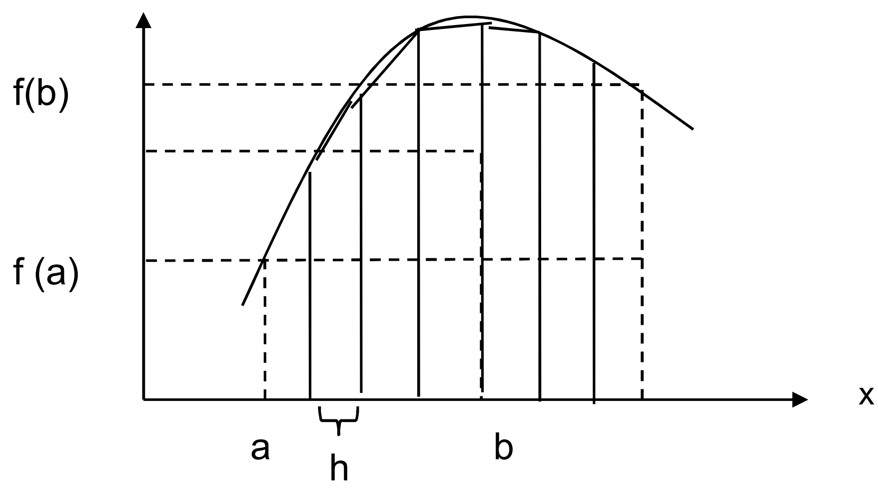
Maka :

$$I \approx \frac{f(a) + f(b)}{2}(b - a)$$

Jika interval nilai a < x < b di bagi menjadi n bagian dengan interval nilai *h* dimana :

$$h = \frac{b - a}{n}$$

Sehingga didapat gambar berikut :



Agar hasil yang diperoleh mendekati nilai sebenarnya, maka Luas di bawah kurva di hampiri dengan membagi interval menjadi beberapa bagian sehingga nilai h semakin kecil ≈ 0.

Memakai pendekatan interpolasi linear untuk subselang (X_i, X_{i+1}), dimana :

$a = X_0$, $x = X_i$ dan $b = X_n$

didapat :

$$\boxed{f_1(x) = f(x_i) + \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h}(x - x_i)}$$

Sehingga :

$$I_i^1 = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f_i^1(x).dx$$

$$= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[f(x_i) + \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h}(x - x_i) \right].dx$$

Untuk memudahkan pengintegrasian, dimisalkan :

$$u = \frac{x - x_i}{h} \quad \text{maka} \quad du = \frac{dx}{h}$$

jika $x_i = 0$ dan $x_{i+1} = 1$, diperoleh :

$$I_i^1 = h\int_0^1 \left[f(x_i) + \left(f(x_{i+1}) - f(x_i)\right).u\right].du$$

$$= h\left(f(x_i) + \frac{1}{2}\left(f(x_{i+1}) - f(x_i)\right)\right)$$

$$= \frac{h}{2}\left(f(x_i) + f(x_{i+1})\right)$$

Karena f(x) mempunyai selang $[x_0 , x_n]$, diperoleh :

$$I = \sum_{i=0}^{n-1} I_i = \frac{h}{2}\left[f(X_0) + 2f(X_1) + 2f(X_2) + \ldots\right.$$

$$\left. + 2f(X_{n-2}) + 2f(X_{n-1}) + f(X_n)\right]$$

$$I = \frac{h}{2}\left[f(X_0) + f(X_n) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(X_i)\right]$$

Kesalahan pemotongan adalah :

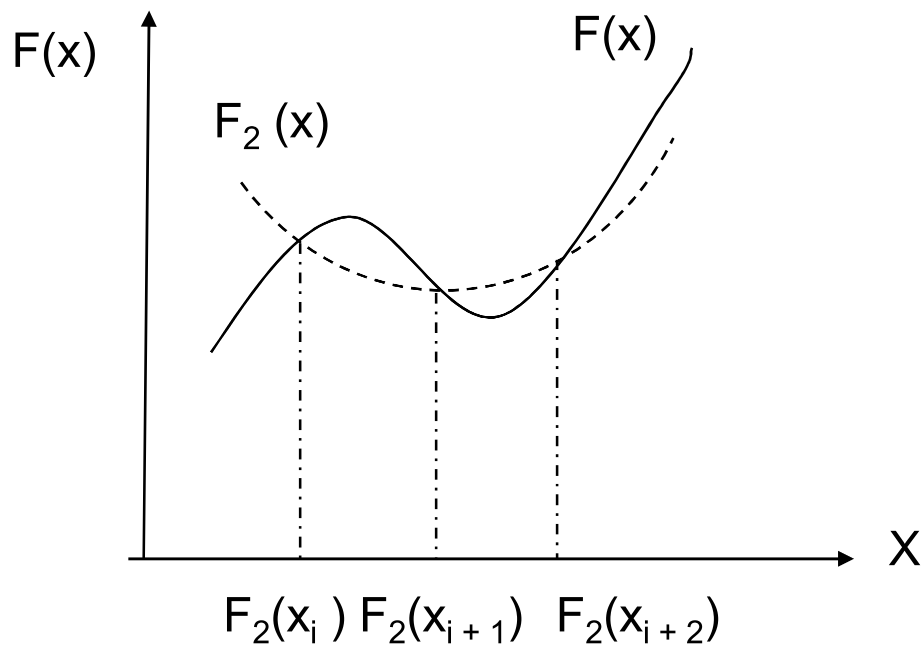
$$\mathrm{E} \le \frac{\mathrm{h}^2}{12}(x_n - x_0)M$$

dimana : $\mathrm{M} = \text{maks } \left|\mathrm{f}^{11}(\xi)\right|$, untuk $x_0 \le \xi \le x_n$

2. Metode Simpson

Disini pendekatan fungsi f(x) diperoleh dari interpolasi polinom derajad dua (parabola) yang

melalui tiga ordinat dari dua selang yang berdampingan. Jadi metode ini tepat untuk fungsi derajat dua



Metode ini membagi daerah yang dicari dalam n subselang, dengan n genap, sehingga :

$$I = \int_a^b f(x).dx = \sum_{i=0}^{(n/2)-1} \int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x).dx$$

Memakai pendekatan f(x) dari interpolasi derajat dua dalam (x_{2i}, x_{2i-2}), yaitu :

$$f_2'(x) = \frac{(x - x_{2i+1}) + (x - x_{2i+2})}{(x_{2i} - x_{2i+1})(x_{2i} - x_{2i+2})} f(x_{2i})$$

$$+ \frac{(x - x_{2i}) + (x - x_{2i+2})}{(x_{2i+1} - x_{2i})(x_{2i+1} - x_{2i+2})} f(x_{2i+1})$$

$$+ \frac{(x - x_{2i}) + (x - x_{2i+1})}{(x_{2i+2} - x_{2i})(x_{2i+2} - x_{2i+1})} f(x_{2i+2})$$

Jika :

$$h = x_{2i+1} - x_{2i}, \quad u = \frac{x - x_{2i}}{h} \text{ dan } \quad du = \frac{dx}{h}$$

Batas integrasi dalam u menjadi (0,2). Substitusi ke persamaan intepolasi derajad 2, didapat :

$$I_i^1 = \frac{1}{2h} \int_0^2 \Big[(u^2 - u)(f(x_{2i}) - f(x_{2i+2}))$$

$$+ (u - 1)(-2) f(x_{2i}) + (2u) f(x_{2i+1}) \Big] dx$$

$$I_i^1 = \frac{h}{3} (f(x_{2i}) + 4 f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2}))$$

Karena f(x) mempunyai selang [x_{2i} , x_{2i+2}], maka :

$$I = \sum_{i=0}^{(n/2)-1} I_i = \frac{h}{3}\left[f(X_0) + 4f(X_1) + 2f(X_2) + 4f(X_3) + \ldots\right.$$

$$\left. + 2f(X_{n-2}) + 4f(X_{n-1}) + f(X_n)\right]$$

Persamaan diatas disebut dengan Metode Simpson 1/3.

Dengan cara yang sama untuk Metode Simpson 3/8 didapat dari interpolasi derajat tiga (melalui empat titik), sehingga :

$$I^1 = \frac{3h}{8}\left[f(X_{3i}) + 3f(X_{3i}) + 3f(X_{3i+2}) + f(X_{3i+3})\right]$$

atau :

$$I = \frac{3h}{8}\Big[f(X_0) + 3f(X_1) + 3f(X_2) + 2f(X_3)$$

$$+ 3f(X_4) + \ldots \quad + 3f(X_{n-1}) + f(X_n)\Big]$$

Kesalahan pemotongan :

$$\mathrm{E} \leq - \frac{\mathrm{h}^4}{180}(x_n - x_0)M$$

$$\text{dimana} : \mathrm{M} = \text{maks}\left|\mathrm{f}''''(\xi)\right|, \text{ untuk } x_0 \leq \xi \leq x_n$$

Contoh :

Evaluasi I = $\int 1/x^2\, dx$,

untuk selang [1,2] dan h = 1; 0.5; 0,25 memakai metode trapesium dan simpson dalam 6 angka dibelakang koma.

Aturan Trapisium

$$I = \frac{h}{2}\left[f\left(X_0\right) + f\left(X_n\right) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f\left(X_i\right)\right]$$

Aturan Simpson 1/3

$$I = \frac{h}{3}\left[f(X_0) + 4f(X_1) + 2f(X_2) + 4f(X_3) + \ldots + 2f(X_{n-2}) + 4f(X_{n-1}) + f(X_n) \right]$$

Aturan Simpson 3/8

$$I = \frac{3h}{8}\left[f(X_0) + 3f(X_1) + 3f(X_2) + 2f(X_3) \right.$$

$$\left. + 3f(X_4) + \ldots \quad + 3f(X_{n-1}) + f(X_n) \right]$$

Nilai sebenarnya = 0.25.

Untuk $f(x_0)$ = 1 dan $f(x_n)$ = 0.25, didapat :

h	1	0.5	0.25
n	1	2	4
$F(x_1)$	-	0.444444	0.640000
$F(x_2)$	-	-	0.444444
$F(x_3)$	-	-	0.326530
Trapisium	0.625000	0,534722	0.508993
Simpson 1/3	0.416666	0.504629	0.500418
Simpson 3/8	0.468750	0.484375	0.366224