TEORI KESALAHAN (GALAT)

Penyelesaian numerik dari suatu persamaan matematik hanya memberikan nilai perkiraan yang mendekati nilai eksak (yang benar) dari penyelesaian analitis. Berarti dalam penyelesaian numerik tersebut terdapat kesalahan (galat) terhadap nilai eksak.

Keandalan suatu nilai numerik dapat ditandai memakai *konsep Angka Bena* yaitu angka yang dapat dipergunakan dengan pasti.

Angka ini diperoleh dari sejumlah angka tertentu ditambah dengan satu taksiran.

Konsep angka bena mempunyai dua terapan yaitu :

1. Kriteria untuk memerinci seberapa jauh *hampiran (aproksimasi)* tersebut dapat dipercaya.
2. Tidak menyatakan bilangan tertentu seperti π, e, atau √7 secara eksak memakai sejumlah berhingga bilangan.

   Contoh : √7 = 2,645751311…..

Macam – macam kesalahan

- Kesalahan Bawaan

  Merupakan kesalahan dari nilai data. Kesalahan ini biasanya terjadi karena kekeliruan dalam menyalin data, salah membaca skala atau kesalahan karena kurangnya pengertian mengenai hukum - hukum fisik dari data yang diukur.

- Kesalahan Pemotongan

  Kesalahan ini terjadi karena tidak dilakukannya perhitungan sesuai dengan prosedur matematik yang benar

- Kesalahan Pembulatan

Merupakan kesalahan yang terjadi karena tidak diperhitungkannya beberapa angka terakhir dari suatu bilangan. Kesalahan ini terjadi apabila :

- Bilangan perkiraan digunakan sebagai pengganti bilangan eksak.
- Suatu bilangan dibulatkan pada posisi ke n dengan membuat semua angka di sebelah kanan dari posisi tersebut nol, sedang angka pada posisi ke n tersebut tidak berubah atau dinaikkan satu digit yang tergantung apakah nilai tersebut lebih kecil atau lebih besar dari setengah dari angka posisi ke n.

Pengabaian diluar angka bena yang terjadi karena kesalahan – kesalahan tersebut dikenal dengan *galat.*

Galat terbagi menjadi :

1. *Galat pembulatan (*untuk menyatakan bilangan eksak)
2. *Galat pemotongan* (untuk menyatakan prosedure matematis).

Galat yang berhubungan dengan *perhitungan* / *pengukuran* dicirikan dengan memperhatikan ketelitian (merupakan nilai sejati yang dihitung / diukur) dan ketepatan (merupakan banyaknya angka bena yang menyatakan suatu nilai atau sebaran dalam perhitungan berulang atau pengukuran nilai yang teliti).

sehingga :

$$\text{Nilai sejati} = \text{aproksimasi} + \text{galat } (E_t)$$

Dimana :

$$E_t \text{ (galat sejati)} = \text{Nilai sejati} - \text{aproksimasi}$$

$$\%\ Galat\ relatif\ (\varepsilon) = \frac{galat}{nilai}\ x\ \ 100\ \%$$

Notasi *t* merupakan nilai sejati, sedangkan *a* merupakan aproksimasi, selanjutnya galat aproksimasi E_a dinyatakan sebagai :

<u>aproksimasi sekarang – aproksimasi sebelumnya</u>

Deret Taylor

Deret Taylor merupakan dasar untuk menyelesaikan masalah dalam metode numerik, khususnya penyelesaian persamaan Diferensial. Jika suatu fungsi $f(\mathbf{X})$ diketahui dititik $\mathbf{X_i}$ dan semua turunan dari f terhadap **X** diketahui pada titik tersebut, maka dengan deret Taylor dapat dinyatakan nilai f pada titik $\mathbf{X_{i+1}}$ yang terletak pada jarak $\Delta\mathbf{X}$ dari titik $\mathbf{X_i}$.

dimana :

$f(\mathbf{X_i})$: fungsi dititik I

$f(\mathbf{X_{i+1}})$: fungsi dititik i+1

$f', f'' \ldots f^n$: turunan pertama, kedua,…,ke n

$\Delta\mathbf{X}$: jarak antara $f(\mathbf{X_i})$ dan $f(\mathbf{X_{i+1}})$

R_n : kesalahan pemotongan

Memperhitungkan satu suku pertama
(order nol)

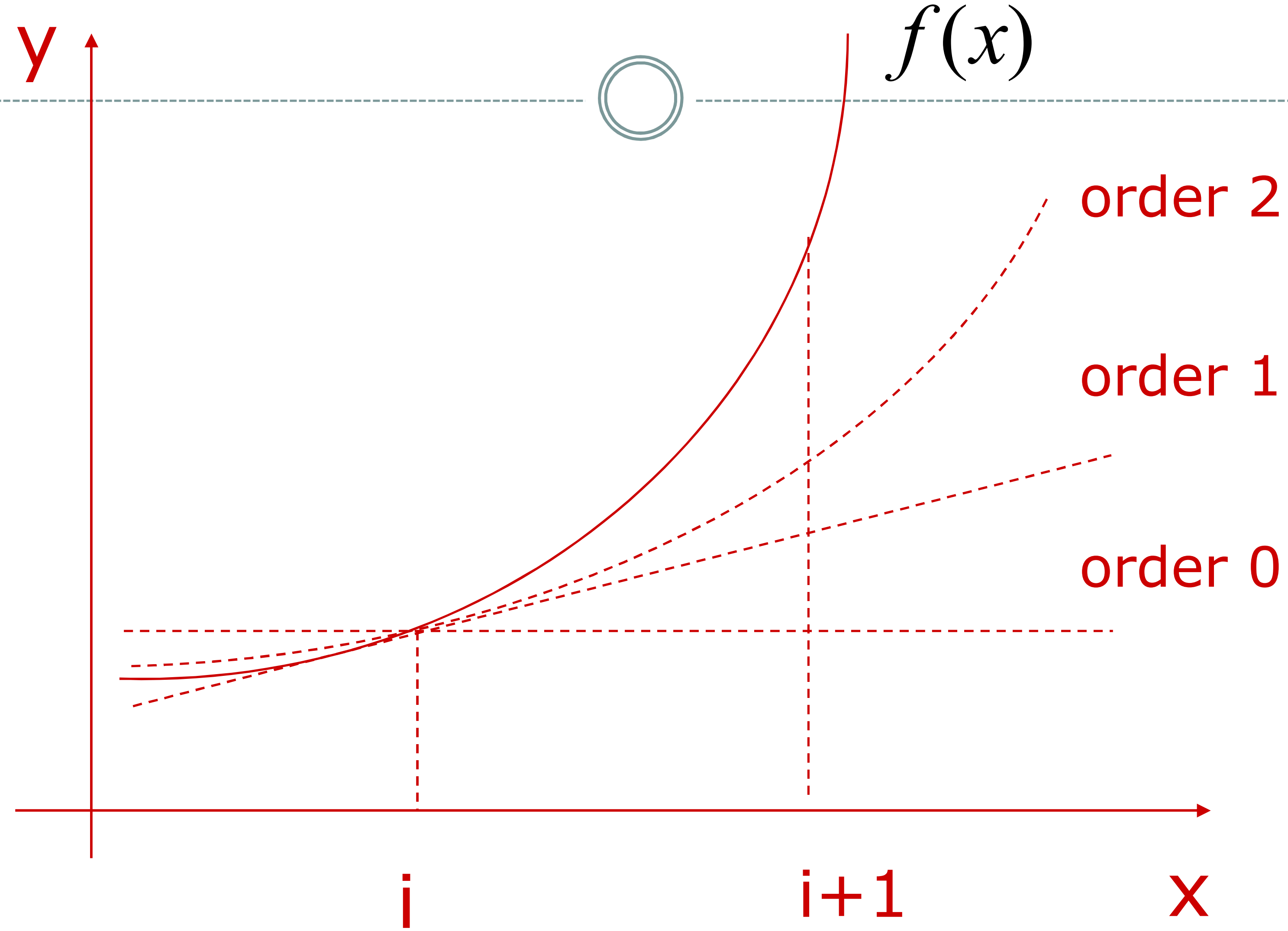
$$f(x_{i+1}) = f(x_i)$$

Memperhitungkan dua suku pertama (order satu)

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)\frac{\Delta x}{1!}$$

Memperhitungkan tiga suku pertama (order dua)

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)\frac{\Delta x}{1!} + f''(x_i)\frac{\Delta x^2}{2!}$$


y
$f(x)$
order 2
order 1
order 0
i
i+1
x

Jika Toleransi galat (e_s) yang di ijinkan adalah :

$(0{,}5 \times 10^{2-n})$ %

untuk $h = x_{i+1} - x_i$, maka deret Taylor dinyatakan sebagai :

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i).h + \frac{f''(x_i).h^2}{2!} + \frac{f'''(x_i).h^3}{3!}$$

$$+ \ \dots \ + \frac{f^{n}(x_i).h^{n}}{n!} + R_n$$

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi).h^{(n+1)}}{(n+1)!}$$

Contoh 1 :

Tentukan kriteria nilai galat dari e^x memakai deret Maclaurine di bawah ini paling sedikit 3 angka bena dimana x = 0,5.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!}$$

Penyelesaian :

Hitung kriteria galat (e_s) = (0,5 x 10^{2-n}) %

= (0,5 x 10^{2-3}) % = 0,05 %

Nilai sejati $e^{0,5}$ = 1,648721271, hasil selanjutnya lihat table di bawah ini:

Suku	Hasil	e_t (%)	e_a (%)
1	1	39,3	-
2	1,5	9,02	33,3
3	1,625	1,44	7,69
4	1,645833333	0,175	1,27
5	1,648437500	0,0172	0,158

Contoh 2 : (Aproksimasi Deret Taylor dari Polinom)

Gunakan uraian deret Taylor orde - nol sampai orde empat untuk fungsi :

$$f(x) = -0{,}1\, x^4 - 0{,}15\, x^3 - 0{,}5\, x^2 - 0{,}25\, x + 1{,}2$$

Mulai dari $x_i = 0$ dengan $h = 1$ s / d $x_{i+1} = 1$. Ramalkan fungsi tersebut.

Penyelesaian :

- Masukkan nilai $x = 0$ dan $x = 1$ ke $f(x)$ akan diperoleh nilai fungsinya adalah $f(0) = 1{,}2$ dan $f(1) = 0{,}2$

- Aproksimasi deret Taylor dengan n = 0 adalah $f(x_{i+1}) \approx f(x_i) \approx 1{,}2$; maka :

$$E_t = 0{,}2 - 1{,}2 = -1{,}0$$

- Pada x = 1, n = 1 diperoleh dari turunan pertama pada $x_i = 0$;

$$f'(0) = -\,0{,}4.0^3 - 0{,}45.0^2 - 1.0^1 - 0{,}25 = -\,0{,}25$$

aproksimasi ordo ke 1 adalah :

$$f(x_{i+1}) \approx 1{,}2 - 0{,}25h \quad \text{dan} \quad f(1) \approx 0{,}95;$$

maka $E_t = 0{,}2 - 0{,}95 = -\,0{,}75$

- Lanjutkan untuk turunan kedua pada $x_i = 0$

  $f''(0) = -1{,}2.0^2 - 0{,}9.0^1 - 1.0 = -1$

  aproksimasi ordo ke 2 adalah :

  $f(x_{i+1}) \approx 1{,}2 - 0{,}25h - 0{,}5h^2$ dan

  $f(1) \approx 0{,}45$; maka :

  $E_t = 0{,}2 - 0{,}45 = -0{,}25$

- Untuk turunan ketiga :

  $f'''(0) = -2{,}4.0^1 - 0{,}9 = -0{,}9$; dan

  $f(x_{i+1}) \approx 1{,}2 - 0{,}25h - 0{,}5h^2 - 0{,}15h^3$ dan

  $f(1) \approx 0{,}3$; maka :

  $$E_t = 0{,}2 - 0{,}3 = -0{,}1$$

- Untuk turunan keempat :

  $f''''(0) = -2{,}4$; dan

  $f(x_{i+1}) \approx 1{,}2 - 0{,}25h - 0{,}5h^2 - 0{,}15h^3 - 0{,}1h^4$
  dan $f(1) \approx 0{,}2$; maka

  $E_t = 0{,}2 - 0{,}2 = 0$

- Untuk turunan kelima adalah nol, sehingga :

  $R_4 \approx 0$ dan taksiran eksak pada $x_{i+1} \approx 1$.