# AKAR – AKAR PERSAMAAN

Penyelesaian suatu fungsi $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ pada masa "*Pra Komputer*" dapat dilakukan dengan cara :

1. *Metode Langsung (analitis);*

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a.c}}{2.a}$$

2. *Teknik Hampiran (Metode Grafis)*

   dengan cara memplotkan fungsinya dan menentukan perpotongannya dengan sumbu x.

3. Trial & Error (Coba dan Ralat)
   dengan cara menentukan nilai x dan menghitung apakah $f(x) = 0$, jika tidak tentukan nilai x yang lain dan hitung lagi hingga diperoleh nilai x yang menghasilkan $f(x) \approx 0$

Nilai x yang diperoleh disebut *Akar dari persamaan.*

Penyelesaian memakai bantuan "*Komputer*" dipergunakan

Teknik Hampiran yang menerapkan strategi bersistem pada *Akar yang Sejati.*

Bentuk Persamaan dapat digolongkan menjadi :

- Persamaan Aljabar; contoh :

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \; ; \; n > 0 \text{ dan } a_n \neq 0$$

- Persamaan Transeden; contoh :

$$f(x) = e^{-x} - x \;\; ; \; f(x) = \sin x \;\; ; \; f(x) = \ln x^2 - 1$$

Bentuk $f(x)$ adalah *implisit* sehingga harus dipecahkan secara *iteratif*.

# METODE ITERASI

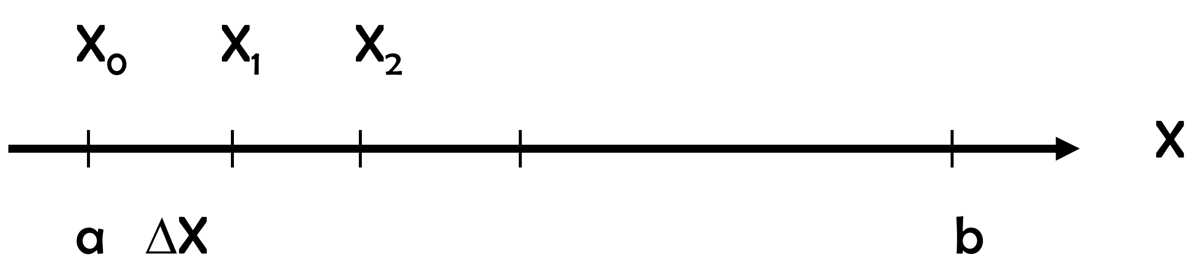
Dimulai dengan suatu tebakan awal, selanjutnya secara sistematis tebakan diperbaiki hingga diperoleh nilai yang sedekat mungkin dengan akar yang dicari.

$x_0, x_1, x_2, \ldots, \rightarrow x$ (akar) untuk $f(x) = 0$.

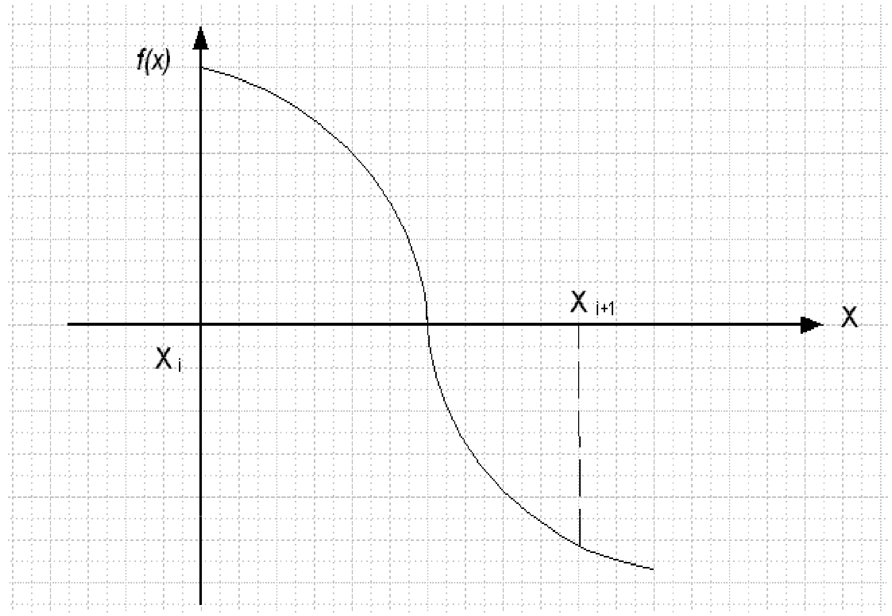
**Lokasi Akar :**

1. Tabulasi Fungsi;

   - Beri nilai awal diujung selang yang diinginkan ($x_0$).
   - Evaluasi fungsi dengan penambahan kecil sepanjang selang ($\Delta x$).
   - Jika fungsi berubah tanda, maka terdapat akar diantara kedua selang tersebut (Nilai pada kedua selang tersebut dapat diambil sebagai *tebakan*).



| x | *f(x)* |
|---|---|
| $X_0 = a$ | ….. |
| $X_1 = a + \Delta x$ | …..  < 0 |
| $X_2 = a + 2.\Delta x$ | …..  > 0 |
| … | |
| … | |
| $X_n = b$ | |




2. Grafik;

   Untuk mendapatkan gambaran tentang akar pada seluruh selang, terbagi menjadi *Grafik Tunggal* dan *Grafik Ganda*.

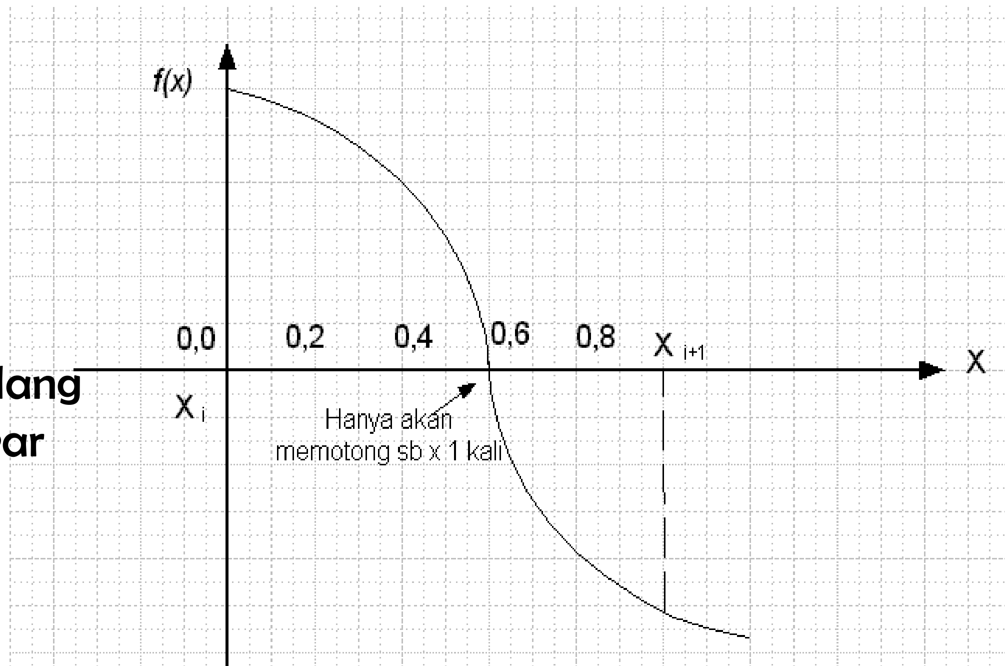
Contoh :

$$f(x) = e^{-x} - x$$

Menggunakan Grafik Tunggal

| x | $f(x)$ |
|---|---|
| 0,0 | 1,000 |
| 0,2 | 0,619 |
| 0,4 | 0,270 |
| 0,6 | -0,051 |
| 0,8 | -0,351 |
| 1,0 | -0,682 |

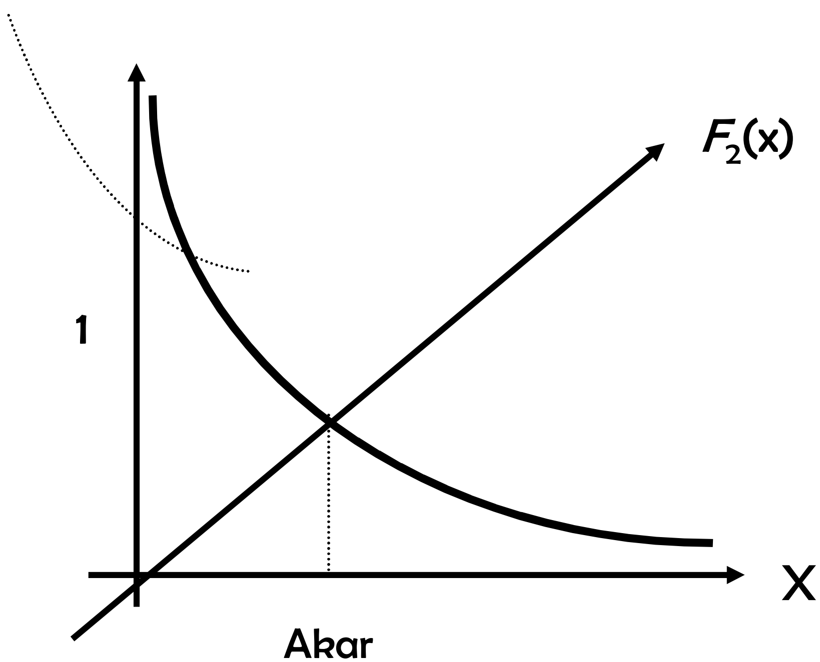
Selang akar



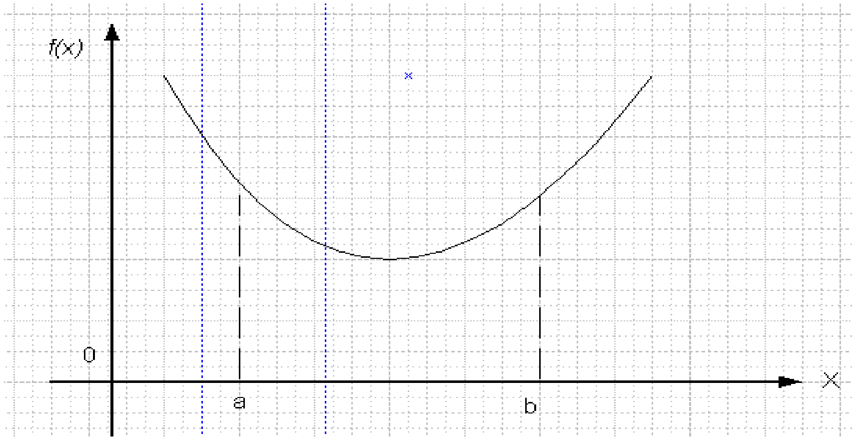
Menggunakan Grafik Ganda :

$$f(x) = 0 \;\rightarrow\; f_1(x) = f_2(x)$$

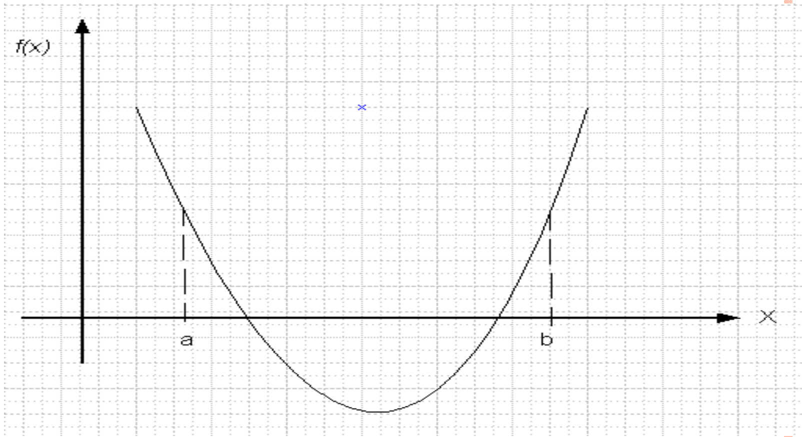
Dimana : $f_1(x) = e^{-x}$ dan $f_2(x) = x$ $\rightarrow$ $e^{-x} = x$



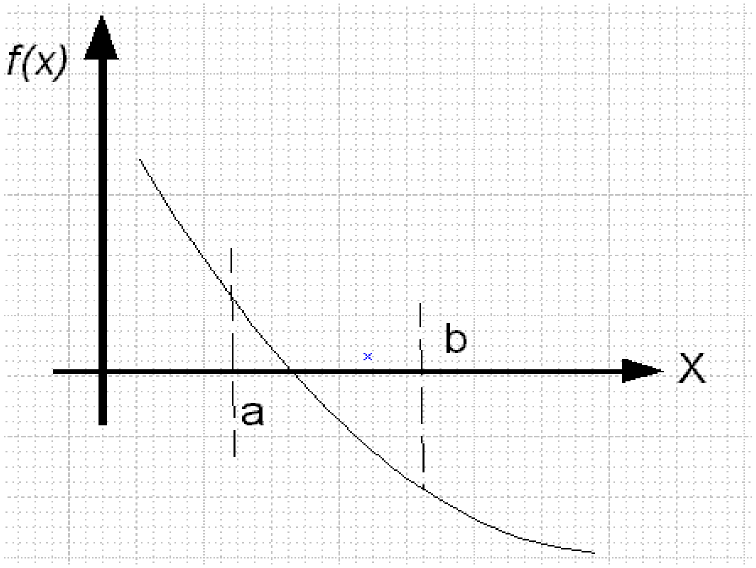
## Cara terjadinya akar pada suatu selang :



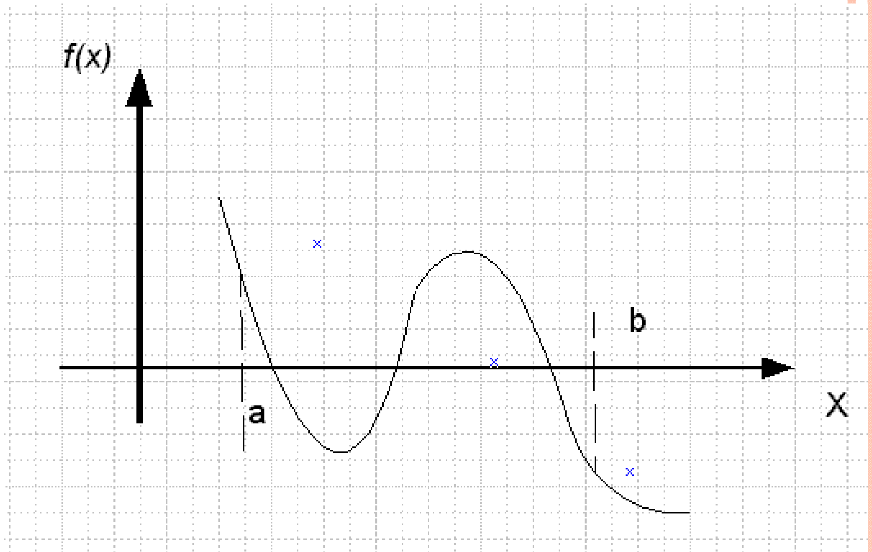

$f(a) \cdot f(b) > 0$




$f(a) \cdot f(b) > 0$




$f(a) \cdot f(b) < 0$




$f(a) \cdot f(b) < 0$

# METODE PENGURUNG

Digolongkan menjadi dua metode, yaitu : Metode Bagi Dua dan Metode Posisi Palsu (Regulasi Falsi).

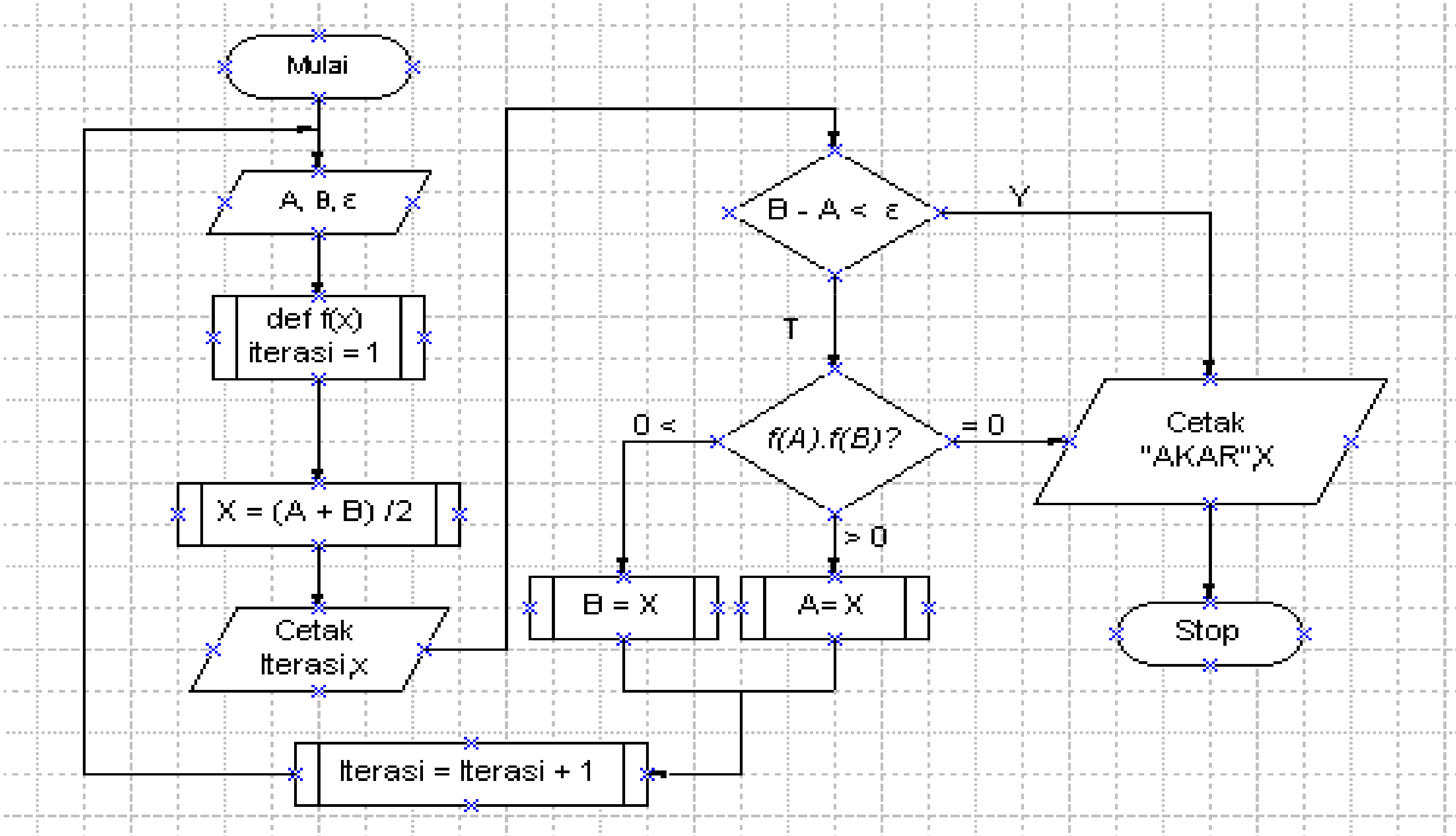
## 1. METODE BAGI DUA;

Langkah penyelesaian algoritma;

- Tinjau selang (a,b) dengan persyaratan $f(a).f(b) < 0$
- Selanjutnya selang dibagi 2 → $T = (a + b) / 2$ selidiki
  jika : $f(a).f(T) > 0$ maka akar pada (T,b);
  $f(a).f(b) < 0$ maka akar pada (a,T);
  $f(a).f(b) = 0$ maka akar = T

- Proses diulangi hingga selang yang mengandung akar sudah cukup kecil ☞ ε; ε = b - a

Langkah penyelesaian Flow Chart:

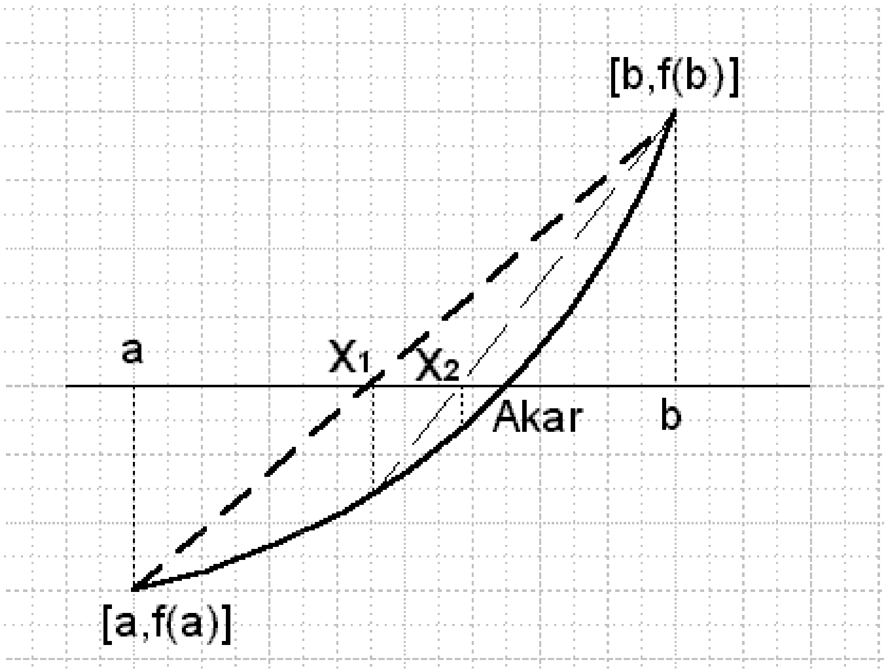


Contoh :

Cari akar dari suatu fungsi : $e^x - 3$ pada selang (1,2).

# 2.METODE POSISI PALSU;

Sebagai alternatif perbaikan terhadap Metode Bagi Dua jika ternyata nilai $f(a) \approx 0$ dibanding $f(b)$ maka terlihat akar lebih mendekati a dibanding b. Untuk itu Metode Posisi Palsu menghubungkan kedua titik a dan b dengan sebuah garis lurus. Perpotongan garis terhadap sumbu x merupakan perbaikan taksiran terhadap akar.




Penurunan Rumus :
Pers. Grs melalui titik
[a,f(a)] dan [b,f(b)] :

$$\frac{y-f(b)}{f(a)-f(b)}=\frac{x-b}{a-b}$$

Perpotongan dengan sumbu x → y = 0, maka :

$$\frac{-f(b)}{f(a)-f(b)}=\frac{x-b}{a-b}$$

$$(x-b)\big(f(a)-f(b)\big)=-f(b)(a-b)$$

$$\boxed{x=b-f(b)\frac{(b-a)}{f(b)-f(a)}}$$

$$x_1\ ,\ x_2\ ,\ x_3\ \ ,\ldots\ldots,\quad Akar$$

$$\left|\frac{x_k-x_{k-1}}{x_k}\right|\leq\varepsilon$$

Langkah penyelesaian algoritma;

1. Tetapkan $x_{lama} = 2b - a$
2. Hitung : $x=b-f(b)\dfrac{(b-a)}{f(b)-f(a)}$

3. Selidiki jika : $f(a).f(x) < 0$ maka $b = x$; jika tidak $a = x$

4. Selidiki jika : $\left| \frac{x - x_{lama}}{x} \right| \leq \varepsilon$ , maka Akar = x,

   Hentikan komputasi

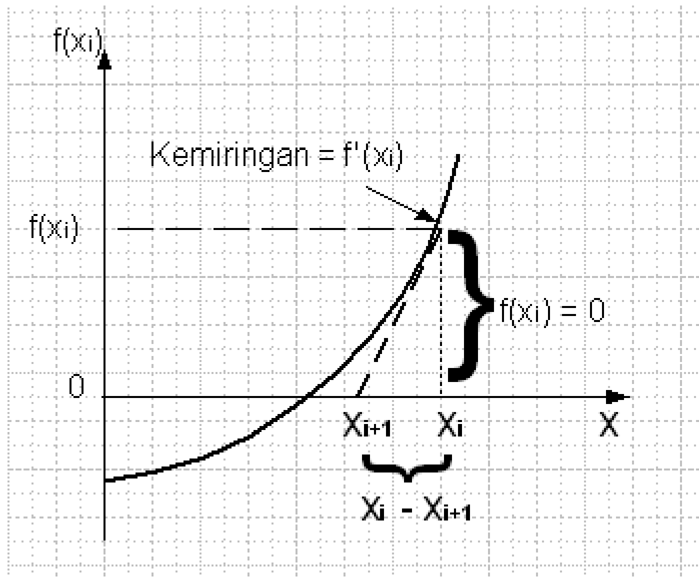
5. Jika tidak tetapkan $x_{lama} = x$, kembali ke proses 2

Soal : Lakukan dua langkah Metode Posisi Palsu untuk persamaan : $x^2 - \sin x = 0$ dengan (a,b) = ((0,5) , (1,5))

# METODE TERBUKA

1. METODE NEWTON-RHAPSON;

Jika terkaan awal pada akar adalah $x_i$, maka sebuah garis singgung (tangen) dapat ditarik dari titik $[x_i, f(x_i)]$.




Titik dimana garis singgung memotong sumbu x akan memberikan taksiran akar yang lebih baik. Turunan pertama di $x_i$ setara dengan kemiringan :

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - 0}{x_i - x_{i+1}} \Rightarrow x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

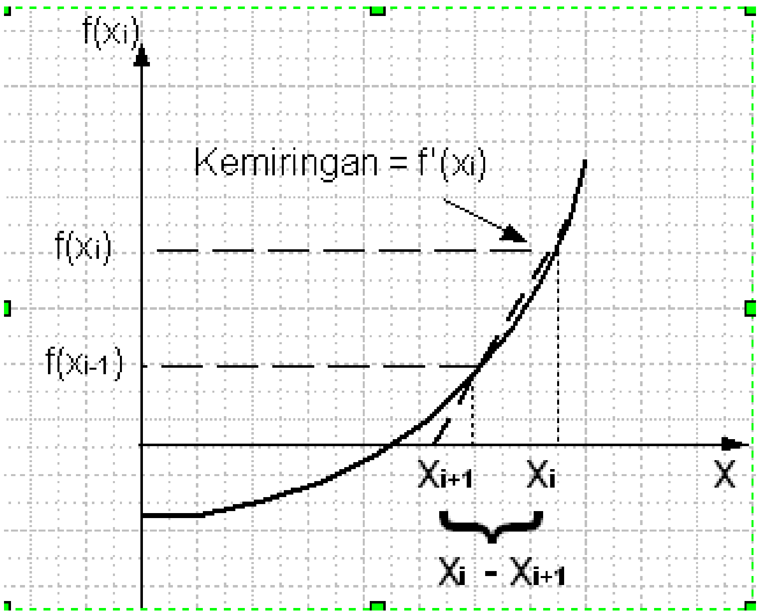
Merupakan rumus Newton - Rhapson

Soal :

Gunakan Metode Newton Rhapson untuk menaksir akar dari : $e^{-x} - x$ dengan terkaan awal $x_0 = 0$

# 2. METODE SECANT;

Metode ini digunakan untuk memperbaiki metode NR untuk turunan yang sulit, yaitu dengan mensubtitusi hampiran beda hingga terbagi ke persamaan awal sehingga didapat :




$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i-1}) - f(x_i)}{x_{i-1} - x_i}$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_{i-1} - x_i)}{f(x_{i-1}) - f(x_i)}$$

Lakukan soal diatas dengan Metode Secant untuk $x_{-1} = 0$ dan $x_0 = 1$.

# 3. METODE AKAR GANDA:

Persamaan untuk akar ganda :

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)\, f'(x_i)}{(f'(x_i))^2 - f(x_i)\, f''(x_i)}$$

Selesaiakan fungsi dibawah ini dengan Metode akar ganda untuk tebakan awal $x_0 = 0$.

$F(x) = (x - 3)(x - 1)(x - 1)(x - 1)$

# 4. SISTEM TAK LINEAR (NR)

Syarat :

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial v}{\partial x}\right| < 1 \quad \text{dan} \quad \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| + \left|\frac{\partial v}{\partial y}\right| < 1$$

Dimana :

$$x_{i+1} = x_i - \frac{u_i \frac{\partial v_i}{\partial y} - v_i \frac{\partial u_i}{\partial y}}{\frac{\partial u_i}{\partial x}\frac{\partial v_i}{\partial y} - \frac{\partial u_i}{\partial y}\frac{\partial v_i}{\partial x}} \quad \text{dan} \quad y_{i+1} = y_i + \frac{u_i \frac{\partial v_i}{\partial x} - v_i \frac{\partial u_i}{\partial x}}{\frac{\partial u_i}{\partial x}\frac{\partial v_i}{\partial y} - \frac{\partial u_i}{\partial y}\frac{\partial v_i}{\partial x}}$$