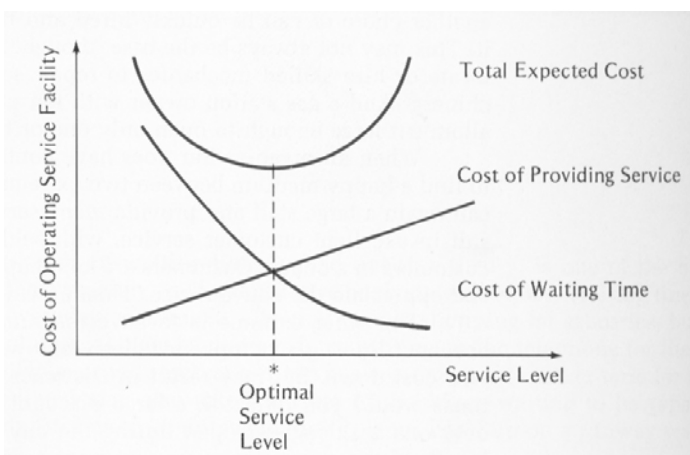
Model Antrian

Queuing Theory

Ada tiga komponen dasar dalam model antrian, yaitu kedatangan, fasilitas pelayanan, dan antrian actual.

Permasalahan deret tunggu kebanyakan dipusatkan pada pertanyaan untuk mendapatkan level ideal jasa yang harus dilakukan oleh perusahaan. Perusahaan yang menyediakan sedikit karyawan untuk melayani konsumen akan menyebabkan konsumen menunggu untuk dilayani, hal ini akan menyebabkan ketidak puasan konsumen. Perusahaan bisa menyediakan banyak tenaga kerja yang melayani konsumen, hal ini akan membuat konsumen tidak perlu menunggu lama untuk mendapatkan pelayanan, yang akan memuaskan konsumen, tetapi hal ini akan menyebabkan kenaikan biaya yang harus dibayarkan oleh perusahaan. Oleh karenanya manajemen harus bisa menentukan posisi diantara kedua ekstrim tersebut diatas, dan menyadari adanya hubungan imbal balik antara biaya dan memberikan pelayanan yang baik terhadap konsumen.

Tujuan untuk mengevaluasi fasilitas jasa adalah mencari total biaya jasa yang diharapkan yang merupakan penjumlahan dari biaya pelayanan yang diharapkan ditambah dengan biaya menunggu yang diharapkan. Digambarkan dengan grafik berikut



Biaya pelayanan akan meningkat ketika perusahaan berusaha meningkatkan pelayanannya. Ketika pelayanan meningkat dalam kecepatan, di sisi lain, biaya waktu yang digunakan untuk menunggu di antrian berkurang. Tingkat pelayanan optimal adalah ketika total biaya jasa yang diharapkan (total expected cost) berada pada titik terendah.

Sebagai ilustrasi, disajikan kasus perusahaan perkapalan "P.T. Sampan". Sampan mengoperasikan sebuah fasilitas dermaga di pelabuhan Tanjung Priok. Rata-rata lima kapal datang untuk menurunkan kargonya dalam tiap shift kerja 12 jam. Tiap kapal yang menunggu dalam antrian untuk menurunkan kargo akan menimbulkan biaya pada perusahaan sebanyak Rp 1.000.000. berdasarkan pengalaman, pihak manajemen memperkirakan jika satu tim buruh angkut yang bekerja, maka tiap kapal rata-rata akan menunggu sebanyak 7 jam untuk dibongkar muatannya. Bila dua tim yang bekerja, maka rata-rata waktu menunggunya menjadi 4jam, untuk tiga tim yang bekerja 3jam, dan untuk 4 tim yang bekerja 2jam. Biaya untuk tiap tim yang bekerja Rp 6.000.000. Tujuan dari analisa ini adalah mendapatkan nilai biaya total terkecil yang bisa didapatkan, disajikan dalam tabel berikut:

		Jumlah tim buruh yang bekerja			
		1	2	3	4
a	Rata-rata kapal datang per shift	5	5	5	5
b	Rata-rata tiap kapal menunggu untuk bongkar muatan	7	4	3	2
c	Total jam bongkar yang hilang per shift (a x b)	35	20	15	10
d	Biaya menunggu tiap kapal (dalam ribuan)	1000	1000	1000	1000
e	Nilai jam bongkar yang hilang (c x d)	35000	20000	15000	10000
f	Upah tim buruh angkut (dlm ribuan)	6000	12000	18000	24000
g	Biaya total (e + f)	41000	32000	33000	34000

Dari tabel diatas kita temukan bahwa nilai optimal adalah dengan 2 tim yang bekerja dengan nilai biaya total Rp. 32.000.000. Jadi, manajemen P.T. Sampan memutuskan untuk menggunakan 2 tim buruh angkut untuk tiap shift kerjanya.

Poisson Distribution

Kasus diatas menggambarkan bila rata-rata kedatangan tetap, tetapi pada kenyataannya kedatangan pelanggan tidaklah tetap, nilainya selalu acak dan tidak dapat diprediksikan secara tepat. Sering kali dalam model antrian, nilai kedatangan per satuan waktu dapat diperkirakan dengan distribusi kemungkinan yang dinamakan *Poisson Distribution* yang dapat ditentukan dengan formula berikut:

$$P(X) = \frac{e^{-\lambda}\,\lambda^{X}}{x!} \quad \text{untuk X = 0,1,2,3,4....}$$

P(X) = kemungkinan kedatangan sebanyak X

X = jumlah kedatangan per satuan waktu

λ = rata-rata kedatangan

e = 2,7183

Konfigurasi Sistem Antrian

Sistem pelayanan pada umumnya dibagi berdasarkan jumlah jalur (jumlah server/pelayan) dan tahapannya (jumlah pemberhentian untuk pelayanan).

Jumlah Service Channel

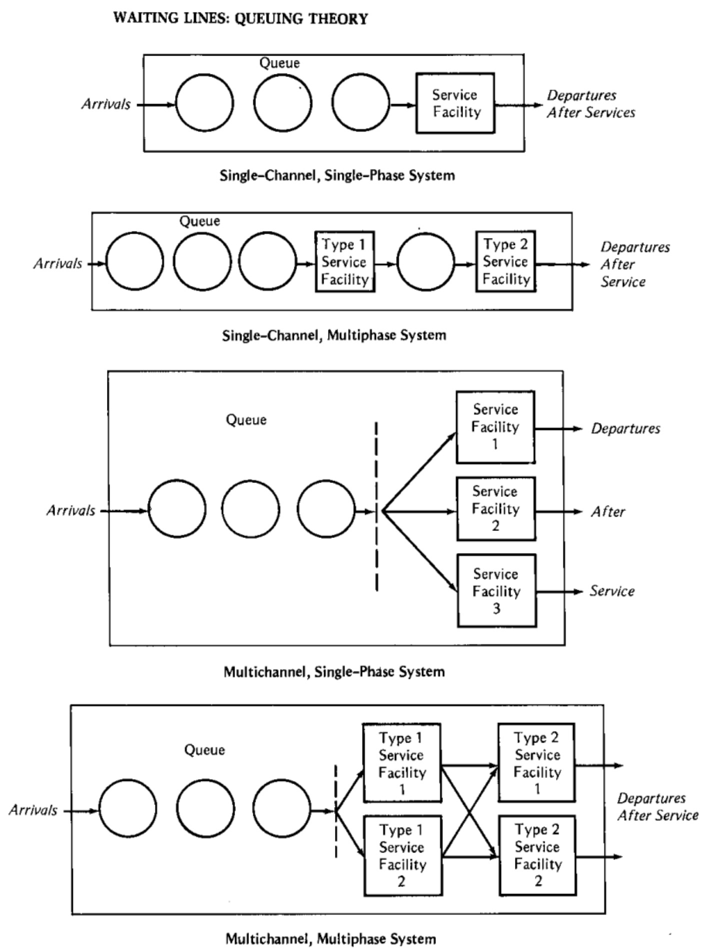
Pada *single channel system*, dengan satu server, dicontohkan dengan restaurant drive trough atau antrian tiket bioskop, dimana antrian dilayani oleh satu pelayan dan dengan satu pemberhentian.

Multiple channel system dapat kita ambil sebagai contoh antrian di bank dimana antrian dilayani oleh beberapa server (teller).

Jumlah pemberhentian

Single phase system adalah konsumen mendapatkan pelayanan dari satu pemberhentian dan kemudian keluar dari antrian, contohnya adalah pada restaurant fast food (McDonalds, KFC, dsb) dimana pelayan yang menerima order memberikan pesanan, sekaligus menerima pembayaran.

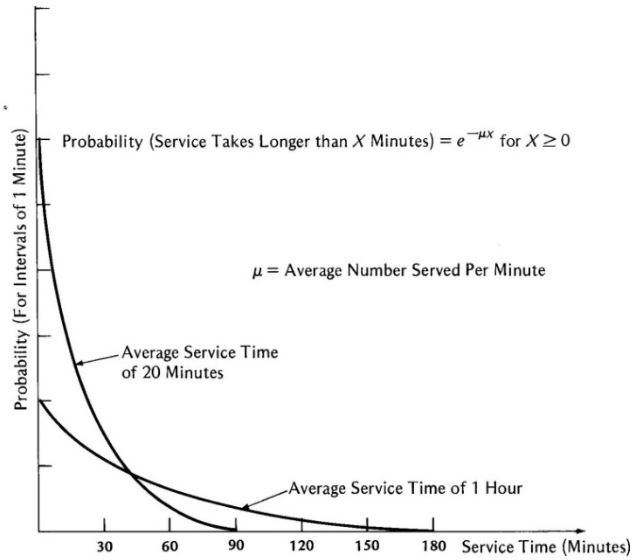
Multiphase system, dapat diambil contoh pelayanan perpanjangan STNK kendaraan bermotor, dimana, tahap pertama konsumen berada dalam antrian cek fisik kendaraan, setelah selesai konsumen masuk ke antrian kedua untuk melakukan pembayaran pajak, dan pada antrian ketiga menerima STNK yang telah selesai.



Distribusi Waktu Pelayanan

Pola pelayanan sama dengan pola kedatangan, bisa konstan dan bisa pula acak, bila waktu pelayanan konstan, maka waktu yang dihabiskan untuk melayani selalu sama untuk tiap konsumen. Hal ini bisa terjadi dalam kasus pelayanan yang dilakukan oleh mesin, contohnya pencucian mobil dengan menggunakan robot, atau pelayanan kursi pijat yang sering ditemui di pusat perbelanjaan.

Tetapi seringkali waktu pelayanan terdistribusi secara acak, dalam banyak kasus, dapat diasumsikan bahwa waktu pelayanan acak dapat dijelaskan dengan *negative exponential probability distribution* atau distribusi kemungkinan eksponensial negative. Ini adalah asumsi yang tepat bila rata rata kedatangan berdasarkan distribusi Poisson.



Grafik diatas menunjukkan bahwa bila waktu pelayanan mengikuti distribusi eksponensial, kemungkinan akan waktu pelayanan yang sangat panjang sangat rendah. Misal ketika rata-rata waktu pelayanan adalah 20 menit, kemungkinan pelayanan akan memakan waktu lebih dari 90 menit tidak ada, dan bila rata-rata pelayanan 1jam, kemungkinan untuk lebih dari 180 menit tidak ada.

Distribusi eksponensial penting dalam proses pembangunan model antrian matematis, karena dasar teorinya adalah asumsi kedatangan poisson dan pelayanan eksponensial.

Model Antrian Single Channel Dengan Kedatangan Poisson Dan Waktu Pelayanan Eksponensial

Asumsi yang mendasari model ini:

1. Kedatangan dilayani dengan basis FIFO (first in, first out)
2. Setiap kedatangan menunggu untuk dilayani di dalam antrian
3. Tiap kedatangan independen terhadap kedatangan sebelumnya, tetapi nilai rata-rata kedatangannya tidak berubah dari waktu ke waktu
4. Kedatangan terjelaskan dengan distribusi kemungkinan poisson dan berasal dari populasi yang sangat banyak
5. Waktu pelayanan bervariasi dari konsumen satu dengan yang lainnya, dan tiap-tiap konsumen independen, tetapi rata-ratanya diketahui
6. Waktu pelayanan berdasarkan distribusi kemungkinan eksponensial
7. Nilai rata-rata pelayanan lebih besar daripada nilai rata-rata kedatangan

Bila ketujuh asumsi tersebut terpenuhi, maka dapat digunakan formula sbb:

$$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

$$W = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}$$

$$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

$$P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$$

$$P_{n>k} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k+1}$$

λ = rata-rata jumlah kedatangan per satuan waktu

μ = rata-rata jumlah orang yang dilayani per satuan waktu

L = jumlah konsumen yang berada dalam sistem

W = rata-rata waktu yang dihabiskan konsumen di dalam sistem

L_q = rata-rata konsumen di dalam antrian

W_q = waktu yang digunakan konsumen menunggu si dalam antrian

ρ = factor utilitas sistem

Po = persentase waktu *idle*

Antrian Multiple Channel dengan Kedatangan Poisson dan Waktu Pelayanan Eksponensial

$$P_0 = \frac{1}{\left[\sum_{n=0}^{n=M-1} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\right] + \frac{1}{M!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^M \frac{M\mu}{M\mu - \lambda}} \qquad \text{untuk } M\mu > \lambda$$

$$L = \frac{\lambda\mu\left(\lambda/\mu\right)^M}{(M-1)!\ (M\mu - \lambda)^2} P_0 + \frac{\lambda}{\mu}$$

$$W = \frac{\mu\left(\lambda/\mu\right)^M}{(M-1)!\,(M\mu - \lambda)^2} P_0 + \frac{1}{\mu} = \frac{L}{\lambda}$$

$$L_q = L - \frac{\lambda}{\mu}$$

$$W_q = W - \frac{1}{\mu} = \frac{L_q}{\lambda}$$

$$\rho = \frac{\lambda}{M\mu}$$

Contoh Kasus Single Channel

Sebuah bengkel sepeda motor mempekerjakan seorang mekanik bernama Jono yang dapat menservis rata-rata 3 sepeda motor dalam 1 jam. Konsumen yang membutuhkan jasa untuk menservis sepeda motornya datang ke bengkel tersebut rata-rata 2 konsumen per jam-nya.

Dari kasus diatas, dapat kita simpulkan bahwa ke 7 syarat dari model antrian single channel poisson terpenuhi, maka:

λ = 2 motor datang per jam

μ = 3 motor diservis per jam

$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{2}{3-2} = \frac{2}{1} =$ 2 motor rata2 dalam sistem antrian

$W = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{3-2} =$ 1 jam rata2 motor berada dalam sistem antrian

$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{2^2}{3(3-2)} = \frac{4}{3} =$ 1,33 motor menunggu dalam baris antrian

$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{2}{3(3-2)} = \frac{2}{3}$ jam = 40 menit rata2 waktu menunggu per motor

$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{2}{3}$ = 0.67 = 67% persentase waktu mekanik sibuk

$P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu} = 1 - \frac{2}{3}$ = 0.33 kemungkinan tidak ada motor dalam antrian

$P_{n>k} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k+1} = \left(\frac{2}{3}\right)^{k+1} = 0.667^{k+1}$: (lihat tabel)

k	$P_{n>k}$ (kemungkinan lebih dari k motor dalam antrian)
0	0.667
1	0.444
2	0.296
3	0.198
4	0.132
5	0.088
6	0.058
7	0.039

Bila kita asumsikan biaya konsumen untuk menunggu dalam antrian, dalam arti ketidak puasan dan ketidak nyamanan konsumen, adalah Rp.10000 per jam tunggu dalam antrian (konsumen yg motornya sedang diservis dianggap tidak menunggu antrian). Dan upah Jono Rp. 7000 per jam, maka:

Rata2 waktu menunggu $^{2}/_{3}$ jam dan ada 16 motor yang diservis per hari (2 per jam, 8 jam kerja per hari), jumlah total waktu menunggu konsumen = $^{2}/_{3}$ x 16 = $10^{2}/_{3}$, berarti dalam kasus ini:

Biaya menunggu konsumen = 10000 x $10^{2}/_{3}$ = Rp. 106.667 per hari

Gaji jono = 8jam x 7000 = Rp. 56.000

Biaya total per hari: 106667 + 56000 = Rp. 162.667 per hari

Pemilik bengkel mempertimbangkan untuk mempekerjakan Paimin yang dapat mengerjakan 4 motor per jam tetapi dengan upah lebih tinggi, Rp. 9000 per jam.

Bila Jono digantikan Paimin:

λ = 2 motor datang per jam

μ = 4 motor diservis per jam

$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$ = $\frac{2}{4-2}$ = $\frac{2}{2}$ = 1 motor rata2 dalam sistem antrian

$W = \frac{1}{\mu - \lambda}$ = $\frac{1}{4-2}$ = $\frac{1}{2}$ jam rata2 motor berada dalam sistem antrian

$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}$ = $\frac{2^2}{4(4-2)}$ = $\frac{4}{8}$ = 0,5 motor menunggu dalam baris antrian

$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$ = $\frac{2}{4(4-2)}$ = $\frac{2}{8}$ jam = 15 menit rata2 waktu menunggu per motor

$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ = $\frac{2}{4}$ = 0.5 = 50% persentase waktu mekanik sibuk

$P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$ = 1- $\frac{2}{4}$ = 0.5 kemungkinan tidak ada motor dalam antrian

$P_{n>k} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k+1}$ = $\left(\frac{2}{4}\right)^{k+1}$ = 0.5^{k+1} :

0	0.5	4	0.031
1	0.25	5	0.016
2	0.125	6	0.008
3	0.062	7	0.004

Rata2 waktu menunggu $^1/_4$ jam dan ada 16 motor yang diservis per hari, jumlah total waktu menunggu konsumen = 4 , berarti dalam kasus ini:

Biaya menunggu konsumen = 10000 x 4 = Rp. 40.000 per hari

Gaji Paimin = 8jam x 9000 = Rp. 72.000

Biaya total per hari: 106667 + 56000 = Rp. 112.000 per hari

Jadi bila Jono digantikan Paimin, maka akan terjadi penghematan sebanyak:

162667 – 112000 = Rp. 50.667 per hari

Contoh Kasus Multiple Channel

Bila bengkel motor diatas mempekerjakan 2 orang mekanik (Jono dan Memed) yang masing-masing mampu menservis 3 motor per jam, konsumen yang datang tetap 2 per jam, dan akan menunggu dalam antrian sampai salah satu mekanik mengerjakan motornya.

λ = 2, μ = 3, M = 2

$$P_0 = \frac{1}{\left[\sum_{n=0}^{n=M-1} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\right] + \frac{1}{M!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^M \frac{M\mu}{M\mu - \lambda}} = \frac{1}{\left[\sum_{n=0}^{1} \frac{1}{n!}\left(\frac{2}{3}\right)^n\right] + \frac{1}{2!}\left(\frac{2}{3}\right)^2 \frac{2(3)}{2(3)-2}} = \frac{1}{1+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\left(\frac{4}{9}\right)\left(\frac{6}{6-2}\right)}$$

$$= \frac{1}{1+\frac{2}{3}+\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$ kemungkinan tidak ada motor dalam sistem antrian

$$L = \frac{\lambda\mu\left(^{\lambda}/_{\mu}\right)^M}{(M-1)!\,(M\mu-\lambda)^2}\, P_0 + \frac{\lambda}{\mu} = \frac{2(3)\left(^2/_3\right)^2}{(2-1)!\,(2(3)-2)^2}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{2}{3} = \frac{^8/_3}{16}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{2}{3} = \frac{3}{4}$$ rata2 motor dalam antrian

$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{^3/_4}{2} = \frac{3}{8}$$ waktu rata2 motor dalam sistem antrian

$$L_q = L - \frac{\lambda}{\mu} = \frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{1}{12}$$ jumlah rata2 motor di dalam antrian

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{^1/_{12}}{2} = \frac{1}{24}\text{jam} = 2\frac{1}{2}\text{ menit}$$ rata2 motor dalam antrian

$$\rho = \frac{\lambda}{M\mu} = \frac{2}{2(3)} = \frac{2}{6} = 0.33 = 33\%$$ waktu mekanik sibuk