PERTEMUAN 8

ANALISIS SENSITIVITAS

Seorang analis jarang dapat menentukan parameter model Program Linier seperti (m, n, C_j, a_{ij}, b_i) dengan pasti karena nilai parameter ini adalah fungsi dari beberapa *uncontrolable variable.*

Sementara itu solusi optimal model Program Linier didasarkan pada parameter tersebut. Akibatnya analis perlu mengamati pengaruh perubahan parameter tersebut terhadap solusi optimal. Analisa perubahan parameter dan pengaruhnya terhadap solusi Program Linier disebut *Post Optimality Analisis.* Istilah post optimality menunjukkan bahwa analisa ini terjadi setelah diperoleh solusi optimal, dengan mengasumsikan seperangkat nilai parameter yang digunakan dalam model. Atau Analisis Postoptimal (disebut juga analisis pasca optimal atau analisis setelah optimal, atau analisis kepekaan dalam suasana ketidaktahuan) merupakan suatu usaha untuk mempelajari nilai-nilai dari peubah-peubah pengambilan keputusan dalam suatu model matematika jika satu atau beberapa atau semua parameter model tersebut berubah atau menjelaskan pengaruh perubahan data terhadap penyelesaian optimal yang sudah ada.

Dapat diketahui bahwa dunia nyata yang diabstraksikan dan disimplifikasikan ke dalam model PL, tidak sederhana seperti rumusan PL sederhana tersebut. Oleh karena itu dalam dunia pengelolaan dan kehidupan dunia nyata, selalu dihadapkan pada pertanyaan-pertanyaan keragu-raguan seperti “apa yang akan terjadi, jika” ini dan itu berubah? Persoalan peluang dan ketidakpastiaan pertanyaan-pertanyaan tersebut harus dapat dijawab dalam rangka meyakinkan pendirian terhadap sesuatu yang akan diputuskan kelak. Dengan demikian hasil yang diharapkan tersebut adalah hasil yang memang ”paling mungkin“ dan ”paling mendekati”, atau “perkiraan yang paling tepat”. Uji kepekaan hasil dan pasca optimal (sebut saja selanjutnya analisis postoptimal) yang dapat memberikan jawaban terhadap persoalan-persoalan tersebut diatas. Analisis postoptimal sangat berhubungan erat dengan atau mendekati apa yang disebut Program Parametrikal atau Analisis Parametrisasi.

Perubahan atau variasi dalam suatu persoalan Program Linier yang biasanya dipelajari melalui Post Optimality analysis dapat dipisahkan ke dalam tiga kelompok umum, yaitu :

1. Analisa yang berkaitan dengan perubahan diskrit parameter untuk melihat berapa besar perubahan dapat ditolerir sebelum solusi optimal mulai kehilangan optimalitasnya, ini dinamakan *Analisa Sensitivitas.* Jika suatu perubahan kecil dalam parameter menyebabkan perubahan drastis dalam solusi, dikatakan bahwa solusi adalah sangat

sensitif terhadap nilai parameter itu. Sebaliknya, jika perubahan parameter tidak mempunyai pengaruh besar terhadap solusi dikatakan solusi relatif insensitif terhadap nilai parameter tersebut.

2. Analisa yang berkaitan dengan perubahan struktural. Masalah ini muncul bila persoalan Program Linier dirumuskan kembali dengan menambahkan atau menghilangkan kendala dan atau variabel untuk menunjukkan operasi model alternatif. Perubahan struktural ini dapat dimasukkan dalam analisa sensitivitas.

3. Analisa yang berkaitan dengan perubahan kontinu parameter untuk menentukan urutan solusi dasar yang menjadi optimal jika perubahan ditambah lebih jauh, ini dinamakan *Parametric-Programming.*

Diketahui Model Matematika Persoalan Program Linier adalah sebagai berikut:

Menentukan nilai dari $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ sedemikian rupa sehingga :

$$Z = C_1 X_1 + C_2 X_2 + \ldots + C_j X_j + \ldots + C_n X_n = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j \quad \text{(Optimal[maksimum/minimum])}$$

Yang kemudian disebut sebagai *Fungsi Tujuan (Objective Function)*

dengan pembatasan (Funsi Kendala/Syarat Ikatan) :

$$\begin{array}{l} a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + \ldots + a_{1n} X_n \le \text{ atau } \ge b_1, \\ a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + \ldots + a_{2n} X_n \le \text{ atau } \ge b_2, \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1} X_1 + a_{m2} X_2 + \ldots + a_{mn} X_n \le \text{ atau } \ge b_m, \end{array}$$

$$\text{atau} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \le \text{ atau } \ge b_i \quad \text{untuk } i = 1,2,3, \ldots, m.$$

dan $X_1 \ge 0$, $X_2 \ge 0, \ldots, X_n \ge 0$ atau $X_j \ge 0$, dimana $j = 1, 2, 3, \ldots, n$ *(syarat non-negatif)*.

Berdasarkan Model Matematika Persoalan Program Linier di atas analisis sensitivitas dapat dikelompokkan berdasarkan perubahan-perubahan parameter:

(1). Perubahan koefisien fungsi tujuan ($\mathbf{C_j}$),

(2). Perubahan Koefisien teknologi ($\mathbf{a_{ij}}$) (koefisien inpu-output),

(3). Perubahan Nilai-Sebelah-Kanan (NSK) fungsi kendala) ($\mathbf{b_i}$),

(4). Adanya tambahan fungsi kendala baru (perubahan nilai **m**)

(5). Adanya tambahan perubahan (variabel) pengambilan keputusan (X_j) (perubahan nilai **n**).

MASALAH TRANSPORTASI

1). Pendahuluan

Selain persoalan program linier seperti yang telah dibicarakan pada bab-bab sebelumnya, ada persoalan program linier yang bertipe khusus, yang kekhususannya terletak pada karakteristik utama. Karakter-karakter khusus tersebut diantaranya persoalan-persoalan tersebut cenderung membutuhkan sejumlah pembatas dan variabel yang sangat banyak sehingga penggunaan komputer dalam penyelesaian metode simpleksnya sangat mahal, proses penghitungannya menghadapi berbagai hambatan. Karakteristik lainnya adalah kebanyakan koefisien a_{ij} dalam pembatasan-pembatasannya berharga satu atau nol, dan sedikit sekali koefisien yang bukan nol terjadi dalam satu pola tertentu.

Tipe khusus persoalan program linier yang paling penting ialah apa yang dikenal sebagai *persoalan transportasi* dan *persoalan penugasan (assignment)* yang erat kaitannya dengan persoalan transportasi.

Dilihat dari model matematika persolan Program Linier terdapat tipe / ciri / karakteristik khusus, yaitu:

1). Semua fungsi kendala bertanda ‘=’

2). Semua nilai a_{ij} bernilai 1 atau 0.

3). Semua Nilai Sebelah kanan (NSK) fungsi kendala adalah 1.

Suatu persoalan Program Linier yang mempunyai tipe:

1). Semua fungsi kendala bertanda ‘=’ dan

2). Semua nilai a_{ij} bernilai 1 atau 0. disebut **Masalah Transportasi**, sedangkan persoalan program linier yang mempunyai tipe:

1). Semua fungsi kendala bertanda ‘=’

2). Semua nilai a_{ij} bernilai 1 atau 0.

3). Semua Nilai Sebelah kanan (NSK) fungsi kendala adalah 1 disebut **Masalah Penugasan.**

2). Persoalan Transportasi

Persoalan transportasi membahas masalah pendistribusian suatu komoditas atau produk dari sejumlah sumber (supply) ke sejumlah tujuan (demand, destination) dengan tujuan meminimumkan ongkos pengangkutan yang terjadi.

Ciri-ciri khusus persoalan transportasi adalah :

1. Terdapat sejumlah sumber dan sejumlah tujuan tertentu.
2. Kuantitas komoditas atau barang yang didistribusikan dari setiap sumber dan yang diminta oleh setiap tujuan, besarnya tertentu.

3. Komoditas yang dikirim atau diangkut dari suatu sumber ke suatu tujuan, besarnya sesuai dengan permintaan dan atau kapasitas sumber.
4. Ongkos pengangkutan komoditas dari suatu sumber ke suatu tujuan, besarnya tertentu.

3). Model Transportasi

Sebuah model transportasi dari sebuah jaringan dengan m sumber dan n tujuan. Sebuah sumber atau tujuan diwakili dengan sebuah node. Busur yang menghubungkan sebuah sumber dan sebuah tujuan mewakili rute pengiriman barang tersebut. Jumlah penawaran di sumber i adalah a_i dan permintaan di tujuan j adalah b_j . Biaya unit transportasi antara sumber i dan tujuan j adalah c_{ij} . Anggaplah X_{ij} mewakili jumlah barang yang dikirimkan dari sumber i ke tujuan j; maka model Program Linier yang mewakili masalah transprotasi ini secara umum adalah sebagai berikut :

Meminimumkan $Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} X_{ij}$

dengan batasan :

(i) Keterbatasan Kapasitas Sumber ke-i :

$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = a_i$, untuk i = 1, 2,..., m

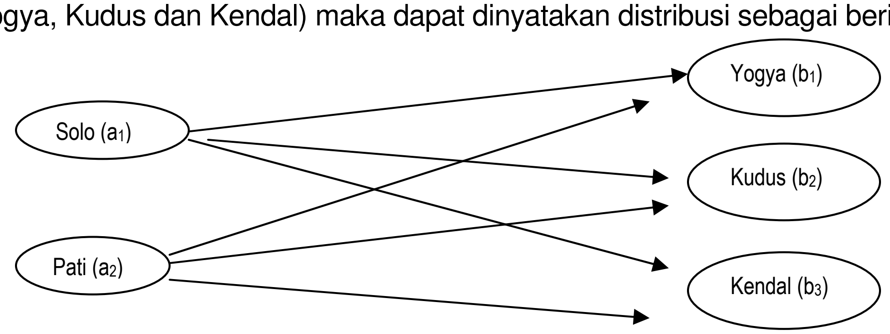
(ii) Keterbatasan Kapasitas Tujuan ke-j :

$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = b_j$, untuk j = 1, 2, ... , n

dan $X_{ij} \geq 0$ untuk semua i = 1, 2,..., m dan j = 1, 2,..., n.

Contoh ilustrasi,

Jika terdapat 2 buah sumber (m=2, misalkan Solo dan Pati) dan 3 tujuan (n=3, misalkan Yogya, Kudus dan Kendal) maka dapat dinyatakan distribusi sebagai berikut :



Keterangan :

Jumlah persediaan barang di sumber ke-1 (Solo) sebanyak a_1 satuan, persediaan di sumber ke-2 (Pati) sebanyak a_2, sedangkan kapasitas di tujuan ke-1 (Yogya) sebesar b_1, tujuan ke-2 (Kudus) sebesar b_2, dan tujuan ke-3 (Kendal) sebesar b_3.

Jumlah barang yang diangkut dari sumber ke-1 (Solo) ke tujuan ke-1 (Yogya) sebesar X_{11} dan ongkos angkut per unitnya C_{11}, jumlah barang yang diangkut dari sumber ke-1 (Solo) ke tujuan ke-2 (Kudus) sebesar X_{12} dan ongkos angkut per unitnya C_{12}, jumlah barang yang diangkut dari sumber ke-1 (Solo) ke tujuan ke-3 (Kendal) sebesar X_{13} dan ongkos angkut per unitnya C_{13}, sedangkan jumlah barang yang diangkut dari sumber ke-2 (Pati) ke tujuan ke-1 (Yogya) sebesar X_{21} dan ongkos angkut per unitnya C_{21}, jumlah barang yang diangkut dari sumber ke-2 (Pati) ke tujuan ke-2 (Kudus) sebesar X_{22} dan ongkos angkut per unitnya C_{22}, jumlah barang yang diangkut dari sumber ke-2 (Pati) ke tujuan ke-3 (Kendal) sebesar X_{23} dan ongkos angkut per unitnya C_{23}. Maka model transportasinya adalah sebagai berikut :

1. Fungsi Tujuan :

   Meminimumkan : $Z = C_{11} X_{11} + C_{12} X_{12} + C_{13} X_{13} + C_{21} X_{21} + C_{22} X_{22} + C_{23} X_{23} = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} C_{ij} X_{ij}$

2. Fungsi Kendala :

   a) $X_{11} + X_{12} + X_{13} = a_1$

   b) $X_{21} + X_{22} + X_{23} = a_2$

   c) $X_{11} + X_{21} \quad = b_1$

   d) $X_{12} + X_{22} \quad = b_2$

   e) $X_{13} + X_{23} \quad = b_3$

   atau dapat dinyatakan dalam notasi :

   untuk fungsi kendala a) dan b) dapat dinyatakan : $\sum_{j=1}^{3} X_{ij} = a_i$, untuk i = 1, 2 . Sedangkan untuk fungsi kendala c), d), dan e) dapat dinyatakan dalam : $\sum_{i=1}^{2} X_{ij} = b_j$, untuk j = 1, 2, 3

3. Dan syarat non negatifnya

   $X_{ij} \geq 0$ untuk semua i= 1,2 dan j = 1,2,3.

   Kelompok batasan pertama menetapkan bahwa jumlah pengiriman dari sebuah sumber tidak dapat melebihi penawarannya; demikian pula, kelompok batasan kedua mengharuskan bahwa jumlah pengiriman ke sebuah tujuan harus memenuhi permintaannya. Suatu permasalahan transprotasi dikatakan *seimbang* (balanced transportation model) jika total penawaran (total supply) *sama dengan* total permintaan (total demand), dengan kata lain : $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$ (iii)

Dalam persoalan yang sebenarnya, batasan ini tidak selalu dipenuhi, atau dengan kata lain jumlah supply yang tersedia mungkin lebih besar atau lebih kecil dari jumlah yang diminta, jika hal ini terjadi disebut dengan model *transprotasi tidak seimbang* (unbalanced). Namun setiap persoalan transportasi selalu dapat dibuat menjadi seimbang dengan memasukkan variabel semu (artificial variable). Jika jumlah demand melebihi jumlah supply, maka dibuat suatu sumber *dummy* yang akan mensupply kekurangan tersebut, yaitu sebanyak $\sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$

Sebaliknya, jika jumlah supply melebihi jumlah demand, maka dibuat suatu tujuan *dummy* yang akan menyerap kelebihan tersebut, yaitu sebanyak $\sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$

Ongkos transportasi per-unit (c_{ij}) dari sumber dummy keseluruh tujuan adalah nol. Hal ini dapat dipahami karena pada pada kenyataannya dari sumber dummy tidak terjadi pengiriman.

Dari persamaan (i), (ii) dan (iii) diperoleh bahwa setiap X_i memenuhi (m+n-1) persamaan pasti juga akan memenuhi persamaan ke-n. Dengan demikian persamaan ke-n dapat diabaikan. Ini berarti ada (m+n-1) persamaan yang benar-benar bebas artinya berbeda satu dengan yang lain dan memuat m,n perubah. Jumlah variabel basis yang tidak sama dengan nol adalah (m+n-1). Salah satu diantara (m+n-1) penyelesaian basis diatas akan merupakan jawab optimal yang diharapkan.

4). Format Tabel Transportasi

Untuk menyelesaikan permasalahan transportasi dapat disusun tabel sebagai berikut :

	T_1	T_2	...	T_n	a_i
A_1	c_{11} X_{11}	c_{12} X_{12}	...	c_{1n} X_{1n}	a_1
A_2	c_{21} X_{21}	c_{22} X_{22}	...	c_{2n} X_{2n}	a_2
⋮	⋮	⋮	…	⋮	⋮
A_m	c_{m1} X_{m1}	c_{m2} X_{m2}	...	c_{mn} X_{mn}	a_m
b_j	b_1	b_2	…	b_n	$\sum$

Contoh 1:

Dari 3 buah pelabuhan A_1, A_2 dan A_3 terdapat semen sebanyak masing-masing 120 ton, 170 ton dan 160 ton. Semen tersebut akan diangkut ke kota T_1 , T_2 dan T_3 yang masing-masing mempunyai daya tampung 150 ton, 210 ton dan 90 ton. Biaya pengiriman dari pelabuhan A_1 ke kota T_1 , T_2 dan T_3 masing-masing adalah 50, 100 dan 100 (dalam ribuan rupiah/ton). Biaya pengiriman dari pelabuhan A_2 ke kota T_1 , T_2 dan T_3 adalah 200, 300 dan 200, sedangkan biaya pengiriman dari pelabuhan A_3 ke kota T_1 , T_2 dan T_3 adalah 100, 200 dan 300.

Tentukan :

a). Tabel Transportasi ?

b). Model Transportasi ?

5). Penyelesaian Permasalahan Transportasi

Untuk menyelesaikan persoalan transportasi, harus dilakukan langkah-langkah sebagai berikut :

1. Menentukan Solusi Fisibel Basis Awal.
2. Menentukan *entering variable* dari variabel-variabel nonbasis. Bila semua variabel sudah memenuhi kondisi optimal, STOP. Bila belum lanjutkan ke langkah 3.
3. Tentukan *leaving variable* diantara variabel-variabel basis yang ada, kemudian hitung solusi yang ada. Kembali ke langkah 2.

Untuk menentukan Solusi Fisibel Basis Awal terdapat 3 metode yang dapat digunakan, yaitu :

1. Metode Pojok Kiri Atas Pojok Kanan Bawah / Metode Pojok Barat Laut / *North West Corner.*
2. Metode Ongkos (Baris / Kolom) Terkecil (*Least Cost*).
3. Metode Pendekatan Vogel (*Vogel's Approximation Method's / VAM)*.

Untuk mencari Jawab Optimal terdapat 2 metode yang dapat digunakan, yaitu :

1. Metode Batu Loncatan (*Stepping Stone*).
2. Metode Faktor Pengali (*Multiplier*) / Metode MODI (*Modified Distribution*)