PERTEMUAN 5

Metode Simpleks Kasus Minimum

Untuk menyelesaikan Persoalan Program Linier dengan Metode Simpleks untuk fungsi tujuan memaksimumkan dan meminimumkan caranya berbeda.

Model matematika dari Permasalahan Program Linier dapat dinyatakan dalam bentuk Sistem Persamaan Linier (AX = B) sebagai berikut :

*) Fungsi Tujuan (Z = CX):

$$Z = \underset{\displaystyle C = [c_j]}{\underset{\downarrow}{\begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix}}} \underset{\displaystyle X = [x_j]}{\underset{\downarrow}{\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}}}$$

*) Fungsi Kendala (AX $\leq$ atau $\geq$ B):

$$\underset{\displaystyle A = [a_{ij}]}{\underset{\downarrow}{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}} \underset{\displaystyle X = [x_j]}{\underset{\downarrow}{\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}}} \leq \text{ atau } \geq \underset{\displaystyle B = [b_i]}{\underset{\downarrow}{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}}}$$

Berikut ini langkah-langkah penyelesaian Persoalan Program Linier fungsi tujuan meminimumkan dengan Metode Simpleks.

1. Mengubah semua kendala ke *Bentuk Kanonik Simpleks* (yang semula menggunakan tanda pertidaksamaan menjadi persamaan) dengan menambah perubah (variabel) *Slack S.* Perubah-perubah slack yang ada dimasukkan (ditambahkan) ke fungsi sasaran dan *diberi koefisien 0*.
2. Apakah dalam matriks A = [a_{ij}] (pada fungsi kendala) sudah terbentuk Matriks Identitas (I_n) ?
   2.1 Apabila dalam matriks A sudah terbentuk Matriks Identitas maka disusun tabel awal simpleks sebagai berikut :

	C_j	C_1	C_2	…	C_n	0	0	…	$-M$	…		
C_i	$X_i \setminus X_j$	X_1	X_2	…	X_n	S_1	S_2	…	V_1	…	b_i	R_i
C_1	X_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	1	0	…	0	…	b_1	R_1
⋮	⋮	⋮	⋮	…	⋮	⋮	⋮	…	⋮	…	⋮	⋮
C_m	X_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	0	0	…	0	…	b_m	R_m
	Z_j	Z_1	Z_2	…	Z_n			…				
	$Z_j - C_j$	$Z_1 - C_1$	$Z_2 - C_2$	…	$Z_n - C_n$			…				

Keterangan :

*) Baris C_j diisi dengan para koefisien Fungsi Tujuan (sasaran)

*) Baris X_j diisi dengan nama-nama perubah (variabel) yang ada.

*) Kolom X_i diisi dengan nama-nama perubah yang menjadi basis (variabel yang menyusun matriks Identitas) .

*) Kolom C_i diisi dengan para koefisien perubah yang menjadi basis

*) Kolom b_i diisi dengan para konstanta fungsi kendala (Nilai Sebelah Kanan/NSK).

*) Baris Z_j diisi dengan rumus $Z_j = \sum_{i=1}^{m} C_i a_{ij}$ **,** untuk j = 1, 2, ..., n

*) Kolom R_i diisi dengan rumus $R_i = \frac{b_i}{a_{ik}}$ (a_{ik} = elemen-elemen yang berada dalam kolom kunci, dan R_i dihitung hanya untuk $a_{ik} \geq 0$)

Selanjutnya dilanjutkan ke langkah 3,

2.2 Jika belum terbentuk matriks identitas (I_n) , maka matriks identitas ditimbulkan (dimunculkan) dengan menambah *perubah semu* dan diberi notasi (*V*). Perubah semu yang ada dimasukan di fungsi sasaran, sedangkan koefisien dari variabel semu pada fungsi sasaran diberi nilai (+M), dengan M adalah bilangan yang cukup besar. Dilanjutkan ke langkah 2.1

3. Penelitian terhadap nilai Z_j - C_j. (Tabel sudah mainimum jika semua $Z_j - C_j \leq 0$).

3.1 Jika untuk semua $Z_j - C_j \leq 0$ dilanjutkan ke langkah 4,

3.2 Jika ada $Z_j - C_j > 0$ (positif), maka dibuat tabel baru dengan cara sebagai berikut :

3.2.1 Menentukan kolom kunci yaitu memilih nilai Z_j - C_j yang terbesar yaitu (Max{ Z_j - C_j}. Sebut dengan Z_k - C_k maka kolom ke-k disebut *kolom kunci.*

3.2.2 Pada kolom ke-k dilakukan pemeriksaan terhadap nilai a_{ik}.

3.2.2.1 Jika untuk semua a_{ik} negatif ($a_{ik} < 0$) maka *jawab tidak terbatas (Nilai*

Fungsi Tujuan tidak Terbatas)/(Unbounded).

3.2.2.2 Jika terdapat a_{ik} yang positif hitung nilai R_i, (untuk a_{ik} yang positif saja) kemudian dilanjutkan ke langkah 3.2.3,

3.2.3 Menentukan baris kunci, yaitu dengan memilih nilai R_i yang terkecil (diantara yang positif) Min{R_i}, namakan R_r, maka baris ke-r disebut *baris kunci.*

3.2.4 Kemudian disusun tabel baru sebagai berikut (dimulai dari baris kunci baru):

3.2.4.1 Untuk elemen baris r baru = elemen baris r lama dibagi a_{rk} , atau

$$\bar{a}_{rj} = \frac{a_{rj}}{a_{rk}}$$

3.2.4.2 Untuk elemen baris i yang lain,

elemen baris i baru = elemen baris i lama - (a_{ik} x elemen baris r baru)

atau $\bar{a}_{ij} = a_{ij} - (a_{ik} x \bar{a}_{rj})$

Kemudian tentukan lagi nilai X_i, C_i, Z_j , Z_j - C_j. Kembali ke langkah 3**.**

4. Apakah pada tabel terakhir terdapat nilai V_k yang positip ?
   4.1 Jika ada nilai V_k yang positif maka *soal asli tidak fisibel (Infeasible Solution).*
   4.2 Jika tidak ada nilai V_k yang positif maka akan diperoleh penyelesaian yang maksimum.

Jadi langkah-langkah Metode Simpleks Kasus Meminimumkan hampir sama dengan kasus Maksimum, hanya ada beberapa perbedaaan yaitu :

1. Pengubahan bentuk kanonik, koefisien dari peubah (variabel) semu (V) pada fungsi sasaran adalah +M (positif M) dimana M bilangan yang sangat besar.
2. Tabel sudah minimum jika semua nilai dari Z_j -$C_j \leq 0$.
3. Penentuan kolom kunci berdasarkan nilai dari Z_j -C_j yang paling besar yaitu (maks {Z_j - C_j }).

Contoh Soal :

Meminimumkan : Z = 40 X_1 + 80X_2

dengan syarat ikatan :

a). $X_1 + X_2 \geq 4$

b). $X_1 + 3X_2 \geq 6$

dan $X_1 \geq 0$, $X_2 \geq 0$

Penyelesaian :

*) Bentuk Kanonik :

$X_1 + X_2 - 1S_1 + 0S_2 + 1V_1 + 0V_2 = 4$

$X_1 + 3X_2 + 0S_1 - 1S_2 + 0V_1 + 1V_2 = 6$

Meminimumkan : $Z = 40X_1 + 80X_2 + 0S_1 + 0S_2 + MV_1 + MV_2$

*) Tabel simpleks :

	C_j	40	80	0	0	M	M		
C_i	$X_i \backslash X_j$	X_1	X_2	S_1	S_2	V_1	V_2	b_i	R_i
M	V_1	1	1	–1	0	1	0	4	4
M	V_2	1	3	0	–1	0	1	6	**2**
	Z_j	2M	4M	–M	–M	M	M	10M	
	Z_j - C_j	2M–40	**4M–80**	–M	–M	0	0		
M	V_1	2/3	0	–1	1/3	1	–1/3	2	**3**
80	X_2	1/3	1	0	–1/3	0	–1/3	2	6
	Z_j	(2M+80)/3	80	–M	(M– 80)/3	M	(80– M)/3	2M+160	
	Z_j - C_j	**(2M–40)/3**	0	–M	(M– 80)/3	0	(80– 3M)/3		
40	X_1	1	1	–3/2	1/2	3/2	–1/2	3	
80	X_2	0	0	1/2	–1/2	–1/2	1/2	**1**	
	Z_j	40	80	–20	–20	20	20	**200**	
	Z_j - C_j	0	0	–20	–20	20–M	20–M		

Karena semua $Z_j - C_j \leq 0$, maka tabel sudah minimal, dengan nilai X_1 = **3**, dan X_2 = **1**, dan $Z_{minimal}$nya = **200**.

Contoh Soal:

Selesaikan Persoalan Program Linier berikut dengan Metode Simpleks.

1. Meminimumkan $F = 22X_1 + 6X_2$

   Fungsi Kendala :

   a. $11X_1 + 3X_2 \geq 33$

   b. $8X_1 + 5X_2 \leq 40$

   c. $7X_1 + 10X_2 \leq 70$

   dan $X_1 \geq 0$, $X_2 \geq 0$,

2. Meminimumkan $Z = 20X + 30Y$

   Fungsi Kendala:

   a). $2X + Y \geq 10$ d). $X - 8Y \leq 0$

   b). $X + 2Y \leq 14$ e). $X \leq 8$

   c). $X + 4Y \geq 12$ dan $X \geq 0, Y \geq 0$

3. Meminimumkan $Z = 6X_1 + 8X_2$

   Fungsi Kendala:

   a). $3X_1 + X_2 \geq 4$

   b). $5X_1 + 2X_2 \leq 10$

   c). $X_1 + 2X_2 = 3$

   dan $X_1 \geq 0, X_2 \geq 0,$

4. Meminimumkan $Z = 2X_1 + 3X_2 + 5X_3 + 6X_4$

   Fungsi Kendala:

   a). $2X_1 + 4X_2 + 6X_3 + 2X_4 \geq 4$

   b). $-2X_1 + X_2 - X_3 + 3X_4 \leq -3,$

   dan $X_1 \geq 0, X_2 \geq 0, X_3 \geq 0, X_4 \geq 0.$

5. Meminimumkan $Z = 4X_1 + 2X_2 - 2X_3 + 5X_4$

   Fungsi Kendala:

   a). $3X_1 + X_2 + 2X_3 + 4X_4 \leq 25$

   b). $2X_1 - X_2 + X_3 + 2X_4 \geq 15,$

   c). $X_1 + 2X_2 + 3X_3 + X_4 = 20,$

   dan $X_1 \geq 0, X_2 \geq 0, X_3 \geq 0, X_4 \geq 0.$