PERTEMUAN 4
Metode Simpleks Kasus Maksimum

Untuk menyelesaikan Persoalan Program Linier dengan Metode Simpleks untuk fungsi tujuan memaksimumkan dan meminimumkan caranya berbeda.

Model matematika dari Permasalahan Program Linier dapat dinyatakan dalam bentuk Sistem Persamaan Linier (AX = B) sebagai berikut :

*) Fungsi Tujuan (Z = CX):

$$Z = \underbrace{\begin{bmatrix} C_1 & C_2 & \cdots & C_n \end{bmatrix}}_{C = [c_j]} \underbrace{\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}}_{X = [x_j]}$$

*) Fungsi Kendala (AX $\leq$ atau $\geq$ B):

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{A = [a_{ij}]} \underbrace{\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}}_{X = [x_j]} \leq \text{atau} \geq \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}}_{B = [b_i]}$$

Berikut ini langkah-langkah penyelesaian Persoalan Program Linier fungsi tujuan memaksimumkan dengan Metode Simpleks.

1. Mengubah semua kendala ke *Bentuk Kanonik* (yang semula menggunakan tanda pertidaksamaan menjadi persamaan) dengan menambah perubah (variabel) *Slack S.* Perubah-perubah slack yang ada dimasukkan (ditambahkan) ke fungsi sasaran dan *diberi koefisien 0*.
2. Apakah dalam matriks A = [a_{ij}] (pada fungsi kendala) sudah terbentuk Matriks Identitas (I_n) ?
   2.1 Apabila dalam matriks A sudah terbentuk Matriks Identitas maka disusun tabel awal simpleks sebagai berikut :

	C_j	C_1 C_2 ... C_n 0 0 ... –M		
C_i	**X_j**	X_1 X_2 ... X_n S_1 S_2 ... V_1	**b_i**	**R_i**

	X_i			
C_1	X_1	a_{11} a_{12} ... a_{1n} 1 0 ... 0	b_1	R_1
.	.	. . ... .	.	.
.	.	. . ..	.	.
.	.	. . ... .	.	.
C_m	X_m	a_{m1} a_{m2} ... a_{mn} 0 0 ... 0	b_m	R_m
	Z_j	Z_1 Z_2 ... Z_n		
	Z_j - C_j	Z_1-C_1 Z_2-C_2 .... Z_n-C_n		

Keterangan :

*) Baris C_j diisi dengan para koefisien Fungsi Tujuan (sasaran)

*) Baris X_j diisi dengan nama-nama perubah (variabel) yang ada.

*) Kolom X_i diisi dengan nama-nama perubah yang menjadi basis (variabel yang menyusun matriks Identitas) .

*) Kolom C_i diisi dengan para koefisien perubah yang menjadi basis

*) Kolom b_i diisi dengan para konstanta fungsi kendala (Nilai Sebelah Kanan/NSK).

*) Baris Z_j diisi dengan rumus $Z_j = \sum_{i=1}^{m} C_i a_{ij}$, untuk j = 1, 2, ..., n

*) Kolom R_i diisi dengan rumus $R_i = \frac{b_i}{a_{ik}}$ (a_{ik} = elemen-elemen yang berada dalam kolom kunci, dan R_i dihitung hanya untuk $a_{ik} \geq 0$)

Selanjutnya dilanjutkan ke langkah 3,

2.2 Jika belum terbentuk matriks identitas, maka matriks identitas ditimbulkan (dimunculkan) dengan menambah *perubah semu* dan diberi notasi (*V*). Perubah semu yang ada dimasukan di fungsi sasaran, sedangkan koefisien dari variabel semu pada fungsi sasaran diberi nilai (-M), dengan M adalah bilangan yang cukup besar. Dilanjutkan ke langkah 2.1

3. Penelitian terhadap nilai Z_j - C_j. (Tabel sudah maksimum jika semua $Z_j - C_j \geq 0$).

   3.1 Jika untuk semua $Z_j - C_j \geq 0$ dilanjutkan ke langkah 4,

   3.2 Jika ada $Z_j - C_j < 0$, maka dibuat tabel baru dengan cara sebagai berikut :

   3.2.1 Menentukan kolom kunci yaitu memilih nilai Z_j - C_j yang terkecil (Min{ Z_j - C_j}. Sebut dengan Z_k - C_k maka kolom ke-k disebut *kolom kunci.*

   3.2.2 Pada kolom ke-k dilakukan pemeriksaan terhadap nilai a_{ik}.

   3.2.2.1 Jika untuk semua a_{ik} negatif maka *jawab tidak terbatas (Unbounded).*

3.2.2.2 Jika terdapat a_{ik} yang positif hitung nilai R_i, (untuk a_{ik} yang positif saja) kemudian dilanjutkan ke langkah 3.2.3,

3.2.3 Menentukan baris kunci, yaitu dengan memilih nilai R_i yang terkecil (diantara yang positif) Min{ R_i}, namakan R_r, maka baris ke-r disebut *baris kunci.*

3.2.4 Kemudian disusun tabel baru sebagai berikut (dimulai dari baris kunci baru):

3.2.4.1 Untuk elemen baris r baru = elemen baris r lama dibagi a_{rk} , atau

$$\bar{a}_{rj} = \frac{a_{rj}}{a_{rk}}$$

3.2.4.2 Untuk elemen baris i yang lain,

elemen baris i baru = elemen baris i lama - (a_{ik} x elemen baris r baru)

atau $\bar{a}_{ij} = a_{ij} - (a_{ik} \, x \, \bar{a}_{rj})$

Kemudian tentukan lagi nilai X_i, C_i, Z_j , Z_j - C_j. Kembali ke langkah 3**.**

4. Apakah pada tabel terakhir terdapat nilai V_k yang positip ?

 4.1 Jika ada nilai V_k yang positif maka *soal asli tidak fisibel (Infeasible Solution).*

 4.2 Jika tidak ada nilai V_k yang positif maka akan diperoleh penyelesaian yang maksimum.

Contoh Soal :

Memaksimumkan : Z = $3X_1 + 3X_2$ (dalam ribuan)

yang memenuhi kendala :

1). $2X_1 + X_2 \leq 30$

2). $2X_1 + 3X_2 \leq 60$

3). $4X_1 + 3X_2 \leq 72$ dan $X_1 \geq 0$, $X_2 \geq 0$.

Penyelesaian :

*) Bentuk kanonik :

1). $2X_1 + 1X_2 + 1S_1 + 0S_2 + 0S_3 = 30$

2). $2X_1 + 3X_2 + 0S_1 + 1S_2 + 0S_3 = 60$

3). $4X_1 + 3X_2 + 0S_1 + 0S_2 + 1S_3 = 72$

dan fungsi tujuannya menjadi :

Memaksimumkan : $Z = 3X_1 + 3X_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3$

Bentuk matriksnya adalah sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 60 \\ 72 \end{bmatrix} \text{ dan } Z = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix}$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow \qquad \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

$$A = [a_{ij}] \quad X = [x_j] \quad B = [b_i] \qquad C = [c_j] \quad X = [x_j]$$

*) Tabel awal simpleks :

	C_j	3	3	0	0	0		
C_i	X_i \ X_j	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	b_i	R_i
0	S_1	2	1	1	0	0	30	30
0	S_2	2	3	0	1	0	60	<u>20</u>
0	S_3	4	3	0	0	1	72	24
	Z_j	0	0	0	0	0	0	
	Z_i - C_i	-3	**<u>-3</u>**	0	0	0		

*) Menentukan kolom kunci dengan memilih nilai dari min $\{Z_j - C_j\}$, yaitu pada kolom-1 dan 2 yang nilainya adalah -3 (dapat dipilih salah 1). Dipilih kolom ke-2 sebagai kolom kunci, sehingga k = 2.

(Tugas: Selesaikan tabel di atas jika yang dipilih sebagai kolom kunci adalah kolom ke-1)

Karena elemen-elemen dalam kolom kunci ada tidak semuanya nol (ada yang positif) maka dapat

ditentukan nilai dari R_i yaitu : $R_1 = \frac{30}{1} = 30,\ \ R_2 = \frac{60}{3} = 20,$ dan $R_3 = \frac{72}{3} = 24$

*) Menentukan baris kunci dengan memilih nilai dari R_i yang terkecil dan nilai $a_{ik} > 0$ (positif). Terdapat pada baris yang ke-2 yaitu $R_2 = 20$, sehingga r = 2

*) Membuat tabel baru sebagai berikut :

Baris kunci baru (baris 2 yang baru) mempunyai elemen-elemen :

$$\bar{a}_{21} = \frac{a_{21}}{a_{22}} = \frac{2}{3},\ \bar{a}_{22} = \frac{a_{22}}{a_{22}} = \frac{3}{3} = 1,\ \bar{a}_{23} = \frac{a_{23}}{a_{22}} = \frac{0}{3} = 0,\ \bar{a}_{24} = \frac{a_{24}}{a_{22}} = \frac{1}{3},\ \bar{a}_{25} = \frac{a_{25}}{a_{22}} = \frac{0}{3} = 0,$$

$$\bar{b}_2 = \frac{b_2}{a_{22}} = \frac{60}{3} = 20$$

atau elemen-elemen baris 2 baru = elemen-elemen baris 2 lama dibagi dengan 3

$$= \frac{\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 60 \end{bmatrix}}{3} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 20 \end{bmatrix}$$

Untuk baris yang lain (baris ke-1 dan 3) $\Rightarrow \hat{a}_{ij} = a_{ij} - (a_{ik} \times \hat{a}_{rj})$

Untuk baris 1 baru	untuk baris 3 baru
$\hat{a}_{11} = a_{11} - (a_{12} \times a_{21}) = 2 - (1 \times (2/3)) = 4/3$	$\hat{a}_{31} = a_{31} - (a_{32} \times a_{21}) = 4 - (3 \times (2/3)) = 2$
$\hat{a}_{12} = a_{12} - (a_{12} \times a_{22}) = 1 - (1 \times 1) = 0$	$\hat{a}_{32} = a_{32} - (a_{32} \times a_{22}) = 3 - (3 \times 1) = 0$
$\hat{a}_{13} = a_{13} - (a_{12} \times a_{23}) = 1 - (1 \times 0) = 1$	$\hat{a}_{33} = a_{33} - (a_{32} \times a_{23}) = 0 - (3 \times 0) = 0$
$\hat{a}_{14} = a_{14} - (a_{12} \times a_{24}) = 0 - (1 \times (1/3)) = -1/3$	$\hat{a}_{34} = a_{34} - (a_{32} \times a_{24}) = 0 - (3 \times (1/3)) = -1$
$\hat{a}_{15} = a_{15} - (a_{12} \times a_{25}) = 0 - (1 \times 0) = 0$	$\hat{a}_{35} = a_{35} - (a_{32} \times a_{25}) = 1 - (3 \times 0) = 1$
$\boldsymbol{b}_1 = b_1 - (a_{12} \times b_2) = 30 - (1 \times 20) = 10$	$\boldsymbol{b}_3 = b_3 - (a_{12} \times b_2) = 72 - (3 \times 20) = 12$

Atau dengan cara lain sebagai berikut :

elemen-elemen baris 1 baru = elemen-elemen baris 1 lama – ($a_{12} \times \hat{a}_{2j}$)

$$
\begin{array}{rllllll}
= & [\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 30] \rightarrow \text{baris 1 lama} \\
1 & [\ 2/3 & 1 & 0 & 1/3 & 0 & 20] \rightarrow \text{baris kunci baru} \\
\hline
 & [\ 4/3 & 0 & 1 & -1/3 & 0 & 10]
\end{array} -
$$

elemen-elemen baris 3 baru = elemen-elemen baris 3 lama – ($a_{13} \times \hat{a}_{2j}$)

$$
\begin{array}{rllllll}
= & [\ 4 & 3 & 0 & 0 & 1 & 72] \rightarrow \text{baris 3 lama} \\
3 & [\ 2/3 & 1 & 0 & 1/3 & 0 & 20] \rightarrow \text{baris kunci baru} \\
\hline
 & [\ 2 & 0 & 0 & -1 & 1 & 12]
\end{array} -
$$

Sehingga tabel dihasilkan tabel baru sebagai berikut:

	C_j	3	3	0	0	0		
C_i	X_i X_j	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	b_i	R_i
0	S_1	4/3	0	1	-1/3	0	10	15/2
3	X_2	2/3	1	0	1/3	0	20	30
0	S_3	2	0	0	-1	1	12	$\underline{6}$
	Z_j	2	3	0	1	0	60	
	$Z_i - C_i$	$\underline{-1}$	0	0	1	0		

*) Karena nilai dari Z_j - C_j masih ada yang negatif maka tabel belum maksimum, sehingga harus ditentukan kolom kunci, baris kunci dan perhitungan untuk menyusun tabel baru seperti langkah di atas, dan diperoleh tabel baru sebagai berikut :

	C_j	3	3	0	0	0		
C_i	X_i X_j	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	b_i	R_i
0	S_1	0	0	1	1/3	-2/3	2	
3	$\boldsymbol{X_2}$	0	1	0	2/3	-1/3	***16***	
3	$\boldsymbol{X_1}$	1	0	0	-1/2	½	***6***	
	Z_j	3	3	0	½	½	***66***	
	$Z_j - C_j$	0	0	0	½	½		

*) Karena semua nilai dari Z_j - $C_j \geq 0$ maka tabel sudah maksimum dengan nilai dari X_1 = 6 dan X_2 = 16 dan Z_{maks} adalah 66.

Sehingga hasil akhir dari tabel simpleks persoalan di atas adalah sebagai berikut:

	C_j	3	3	0	0	0		
C_i	X_i / X_j	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	b_i	R_i
0	S_1	2	1	1	0	0	30	30
0	S_2	2	3	0	1	0	60	**<u>20</u>**
0	S_3	4	3	0	0	1	72	24
	Z_j	0	0	0	0	0	0	
	Z_i - C_i	-3	**<u>-3</u>**	0	0	0		
0	S_1	4/3	0	1	-1/3	0	10	15/2
3	X_2	2/3	1	0	1/3	0	20	30
0	S_3	2	0	0	-1	1	12	**6**
	Zj	2	3	0	1	0	60	
	Zi - Ci	**-1**	0	0	1	0		
0	S_1	0	0	1	1/3	-2/3	2	
3	**X_2**	0	1	0	2/3	-1/3	**16**	
3	**X_1**	1	0	0	-1/2	½	**6**	
	Zj	3	3	0	½	½	**66**	
	Zj – Cj	0	0	0	½	½		

<u>Contoh Soal:</u>

Selesaikan Persoalan Program Linier berikut dengan Metode Simpleks.

1. Memaksimumkan $Z = 2 X_1 + X_2$

   Fungsi Kendala :

   a. $X_1 + 2 X_2 \leq 80$

   b. $3X_1 + 2 X_2 \leq 120$

   c. $2X_1 \qquad \leq 360$ dan $X_1 \geq 0$, $X_2 \geq 0$.

2. Memaksimumkan $Z = 2 X_1 + 3X_2$

   Fungsi Kendala :

   a. $5X_1 + 6X_2 \leq 60$

   b. $X_1 + 2X_2 \leq 16$

   c. $X_1 \qquad \leq 10$

d. $X_2 \leq 6$, dan $X_1 \geq 0$, $X_2 \geq 0$.

3. Memaksimumkan $Z = 2X_1 - 7X_2$

   Fungsi Kendala :

   a. $-2X_1 + 3X_2 = 3$

   b. $4X_1 + 5X_2 \geq 16$

   c. $6X_1 + 7X_2 \leq 3$

   d. $4X_1 + 8X_2 \geq 5$, dan $X_1 \geq 0$, $X_2 \geq 0$.

4. Memaksimumkan $Z = 4X_1 + 5X_2$

   Fungsi Kendala :

   a). $5X_1 + 4X_2 \leq 200$

   b). $3X_1 + 6X_2 = 180$

   c). $8X_1 + 5X_2 \geq 160$, dan $X_1 \geq 0$, $X_2 \geq 0$

5. Memaksimumkan $Z = 4X_1 + 2X_2 - X_3 + 5X_4$

   Fungsi Kendala:

   a). $3X_1 + X_2 + 2X_3 + 4X_4 \leq 25$

   b). $2X_1 - X_2 + X_3 + X_4 \geq 15$

   c). $X_1 + 2X_2 + 3X_3 + X_4 = 20$, dan $X_1 \geq 0$, $X_2 \geq 0$, $X_3 \geq 0$, $X_4 \geq 0$.