PERTEMUAN 6

Analisis Primal - Dual

Setiap persoalan program linier selalu mempunyai dua macam analisis, yaitu : analisis primal dan analisis dual yang biasanya disebut *analisis primal-dual.* Untuk menjelaskan hubungan antara Primal dengan Dual akan ditunjukan dengan contoh kasus di bawah ini:

PT. Maju Jaya adalah sebuah perusahaan yang menghasilkan dua macam produk yaitu A dan B. Setiap Produk A menghasilkan laba Rp. 40,- dan Produk B Rp. 60,-. Kedua macam produk tersebut harus diproduksi melalui dua tahap proses yaitu proses I dan proses II. Kapasitas dan waktu proses bagi kedua macam produk tersebut adalah sebagai berikut :

Proses	Waktu Proses		Kapasitas per bulan (jam)
	A	B	
I	3	2	2.000
II	1	2	1.000

Model matematika Kasus diatas adalah :

Fungsi Tujuan : Memaksimumkan : Z = 40A + 60B,

Fungsi Kendala :

1. $3A + 2B \leq 2000$
2. $A + 2B \leq 1000$,
3. $A, B \geq 0$,

Model matematika diatas disebut model Primal. Dual pada dasarnya adalah masalah penentuan harga, yaitu :

Harga dari sumber-sumber yang dipergunakan untuk berproduksi secara optimal, dimana harga tersebut merupakan nilai minimum sehingga dapat dipergunakan sebagai bahan pertimbangan untuk menambah atau mengurangi sumber-sumber tersebut secara tepat.

Misalkan C dan D sebagai biaya sewa per jam yang harus dibebankan kepada proses I dan II. Karena jumlah kapasitas yang tersedia untuk proses I adalah 2000 jam dan proses II 1000 jam, maka biaya sewa total untuk kedua macam proses tersebut adalah :

F = 2000C + 1000D.

Selagi F merupakan jumlah biaya sewa kedua macam proses tersebut maka manajeman PT. Maju Jaya tersebut berusaha untuk meminimumkannya. Pandang jika model Primal sebagai pihak penjual yang ingin memaksimumkan laba, di sisi lain model Dual sebagai pihak pembeli yang menginginkan harga pembelian yang minimum. Setiap unit produk A memerlukan waktu 3 jam pada proses I dan 1 jam pada prose II, sehingga biaya untuk menghasilkan setiap unit produk A adalah 3C + 1D.

Dipandang dari pihak pembeli tentu saja harga tesebut tidak boleh lebih rendah dari sumbangan laba yang akan diberikan oleh produk A terhadap penjualan yaitu sebesar Rp. 40,- (bila penjual mendapat laba Rp. 40,- untuk setiap penjualan produk A, maka tentu saja pembeli menginginkan agar harga yang ia bayar untuk biaya pemrosesan produk tersebut paling sedikit harus sama dengan laba yang diperoleh penjual yaitu sebesar Rp. 40,-). Sehingga biaya untuk memroses setiap unit produk A adalah

$3C + 1D \geq 40$.

Dengan cara yang sama biaya untuk memroses setiap unit produk B adalah $2C + 2D \geq 60$ dan selanjutnya karena harga tidak mungkin negatif maka $C \geq 0$ dan $D \geq 0$.

Asumsi Dasar :

Untuk dapat menyusun suatu persoalan primal Program Linier ke dalam bentuk dual, maka selalu harus dirumuskan terlebih dahulu ke dalam bentuk kanonik.

- ❖ Untuk persoalan maksimasi, maka semua rumusan fungsi kendala mempunyai tanda *lebih kecil dari pada atau sama dengan (≤).*
- ❖ Untuk persoalan minimasi maka tanda fungsi syarat ikatannya harus *lebih besar dari pada atau sama dengan (≥) .* (Ingat bahwa tidak perlu semua konstanta atau nilai sebelah kanan (nsk) fungsi kendala yang bersangkutan harus selalu non-negatif dalam suatu rumusan yang berbentuk kanonik).
- ❖ Jika suatu persoalan dalam rumusan Program Linier mempunyai fungsi kendala kesamaan (nilai nsk-nya bertanda sama dengan), maka fungsi kendalanya tersebut dapat ditukar atau diganti dengan dua fungsi lainnya, yang pertama, bertanda *"lebih kecil dari pada atau sama dengan (≤)"* dan yang kedua, bertanda *"lebih besar dari-pada atau sama dengan (≥)".* Salah satu diantara kedua fungsi kendala lain tersebut (dipilih salah satu), kemudian diambil, dan kalikan dengan (–1) untuk mendapatkan fungsi kendala yang sesuai dengan aturan yang diminta oleh bentuk kanonik tersebut.

Model Umum Persoalan Primal - Dual

<u>Bentuk Primal:</u>

Maksimumkan : $Z = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j$

syarat ikatan : $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \le b_i$ untuk i= 1, 2, 3, ...,m.

dan $X_j \ge 0$, j = 1, 2, ... , n

Kalau akan dinyatakan menjadi <u>Bentuk Dual :</u>

Minimumkan : $F = \sum_{i=1}^{m} b_i Y_i$

syarat ikatan : $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} Y_i \ge C_j$ untuk j= 1, 2, 3, ...,n.

dan $Y_i \ge 0$, i = 1, 2, ... , m

dimana : $Z_{opt} = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j^*$ adalah sama dengan $F_{opt} = \sum_{i=1}^{m} b_i Y_i^*$

Aturan umum dalam perumusan persoalan Program Linier menyangkut Bentuk Primal dan Dual adalah :

Bentuk Primal	**Bentuk Dual**
Memaksimumkan fungsi tujuan	Meminimumkan fungsi tujuan, dan sebaliknya.
Koefisien fungsi tujuan (C_j)	Nilai Sebelah Kanan (NSK) fungsi kendala
NSK fungsi kendala primal-primal (b_i)	Koefisien fungsi tujuan
Koefisien peubah ke-j	Koefisien kendala ke-j
Koefisien kendala ke-i	Koefisien peubah ke-i
Peubah ke-j yang positif (≥ 0)	Kendala ke-j dengan tanda ketidaksamaan "lebih besar daripada atau sama dengan " (≥).
Peubah ke-j tandanya tidak dibatasi	Kendala ke-j yang bertanda sama dengan
Kendala ke-i yang bertanda sama dengan	Peubah ke-i tandanya tidak dibatasi
Kendala ke-i yang bertanda ketidaksamaan (≤)	Peubah ke-i yang positif (≥)

Contoh Soal :

Andaikan terdapat suatu persoalan Program Linier sebagai berikut :

Memaksimumkan : $Z = 10X_1 + 6X_2$ .... (1),

Syarat ikatan :

a). $2X_1 + 3X_2 \leq 90$ .... (2)

b). $4X_1 + 2X_2 \leq 80$ .... (3)

c). $X_2 \geq 15$ .... (4)

d). $5X_1 + X_2 = 25$ .... (5)

dan X_1 , $X_2 \geq 0$

Ubahlah ke dalam Bentuk Dualnya !

Penyelesaian :

***Langkah 1**,*

Transfomasikan ke dalam bentuk kanonik primal (karena fungsi tujuannya memaksimumkan maka tanda ketidaksamaannya dibuat $\leq$). Manipulasi dilakukan pada rumus (4) dan (5) dengan berikut :

*) Kalikan rumus (4) dengan (–1) didapatkan :

$-X_2 \leq -15$

*) Ganti rumus (5) menjadi ketidaksamaan :

$5X_1 + X_2 \leq 25$ (5a) dan $5X_1 + X_2 \geq 25$ (5b)

dan rumus (5b) dikalikan dengan (-1) didapat :

$-5X_1 - X_2 \leq -25$

Dengan demikian diperoleh bentuk kanonik primal menjadi :

Memaksimumkan : $Z = 10X_1 + 6X_2$

Syarat ikatan :

a). $2X_1 + 3X_2 \leq 90$

b). $4X_1 + 2X_2 \leq 80$

c). $-X_2 \leq -15$

d). $5X_1 + X_2 \leq 25$

e). $-5X_1 - X_2 \leq -25$ dan X_1 , $X_2 \geq 0$

Langkah 2,

Rumuskan bentuk kanonik dari persoalan primal tersebut ke dalam bentuk dual, dan diperoleh :

Meminimumkan : $F = 90Y_1 + 80Y_2 - 15Y_3 + 25Y_4 - 25Y_5$

syarat ikatan :

a). $2Y_1 + 4Y_2 - 0Y_3 + 5Y_4 - 5Y_5 \geq 10$

b). $3Y_1 + 2Y_2 - Y_3 + Y_4 - Y_5 \geq 6$

dan Y_1 , Y_2 , Y_3 , Y_4 , $Y_5 \geq 0$ atau $Y_i \geq 0$, untuk i = 1, 2, …, 5.

<u>Soal-soal Latihan :</u>

Diketahui Persoalan Primal sebagai berikut, kemudian ubahlah ke dalam Bentuk Dualnya :

1. Meminimumkan $Z = 6X_1 + 8X_2$

   Dengan syarat ikatan :

   $3X_1 + X_2 \geq 4$

   $5X_1 + 2X_2 \leq 10$

   $X_1 + 2X_2 = 3$ dan $X_1, X_2 \geq 0$

2. Memaksimumkan $Z = -X_1 + 4X_2$

   Dengan syarat ikatan :

   $X_1 - X_2 \geq 0$

   $-X_1 + 2X_2 \leq 2$ dan $X_1, X_2 \geq 0$

3. Meminimumkan $Z = 22X_1 + 6X_2$

   Dengan syarat ikatan :

   $11X_1 + 3X_2 \geq 33$

   $8X_1 + 5X_2 \leq 40$

   $7X_1 + 10X_2 \leq 70$ dan $X_1, X_2 \geq 0$

4. Meminimumkan $Z = -2X_1 + 6X_2$

   Dengan syarat ikatan :

   $3X_1 + 2X_2 \leq 6$

   $X_1 - X_2 \geq -1$

   $2X_1 - X_2 \geq 2$ dan $X_1, X_2 \geq 0$

Masalah Peubah (Variabel) yang tidak Dibatasi

Jika sebuah peubah X_j tidak dibatasi sebagai perubah non-negatif, maka dapat diganti dengan dua buah perubah yang baru yaitu X_j^+ dan X^-_j sehingga :

$X_j = X_j^+ - X^-_j$ dimana $X_j^+ \geq 0$ dan $X^-_j \geq 0$.

Variabel X_j merupakan beda atau sisa dari dua perubah non-negatif X_j^+ dan X^-_j. Dengan kata lain X_j merupakan nilai tengah, sedangkan X_j^+ dan X^-_j adalah perubah deviasi atau simpanan terhadap perubah nilai tengah atau perubah target.

Contoh :

Andaikan suatu persoalan Program Linier dengan X_2 tidak dibatasi syarat non negatif sebagai berikut :

Maksimumkan $Z = 2X_1 + 5X_2$ (1)

Syarat Ikatan :

$3X_1 + 2X_2 \leq 6$ (2)

$2X_1 + 9X_2 \leq 8$ (3)

dan $X_1 \geq 0$, X_2 tidak dibatasi syarat non-negatif.

Penyelesaian :

Perumusan model Program Linier di atas tidak baik karena tidak memenuhi peraturan Program Linier yang ada, yaitu semua perubah X_j yang menjadi perubah keputusan tidak boleh negatif. Oleh karena itu X_2 disempurnakan menjadi :

$X_2 = X_2^+ - X_2^-$ dimana $X_2^+ \geq 0$ dan $X_2^- \geq 0$,

maka persoalan diatas menjadi :

Memaksimumkan $Z = 2X_1 + 5(X_2^+ - X_2^-)$

Syarat ikatan :

$3X_1 + 2X_2^+ - 2X_2^- \leq 6$

$2X_1 + 9X_2^+ - 9X_2^- \leq 8$

dan $X_1 \geq 0$, $X_2^+ \geq 0$, $X_2^- \geq 0$.

Soal-soal Latihan :

I. Ubahlah ke dalam Bentuk Dualnya persoalan Program Linier berikut ini:

1. Memaksimumkan $Z = 23X_1 + 32X_2$

   Fungsi Kendala :

   $10X_1 + 6X_2 \leq 2500$

   $8X_1 + 10X_2 \leq 2000$

   $X_1 + 2X_2 \leq 500$ dan X_1 , $X_2 \geq 0$

2. Meminimumkan $Z = 20000X_1 + 22000X_2 + 18000X_3$

   Fungsi Kendala:

   $4X_1 + 6X_2 + X_3 \geq 54$

   $4X_1 + 4X_2 + 6X_3 \geq 65$

   $X_1 \geq 7$

   $X_2 \geq 7$

   $X_3 \geq 7$ dan X_1 , X_2 , $X_3 \geq 0$

3. Memaksimumkan $Z = 2X_1 - 7X_2$

   Fungsi Kendala :

   $-2X_1 + 3X_2 = 3$

   $4X_1 + 5X_2 \geq 10$

   $6X_1 + 5X_2 \leq 3$

   $4X_1 + 8X_2 \geq 5$ dan X_1 , $X_2 \geq 0$

4. Meminimumkan $Z = 4X_1 + 6X_2$

   Fungsi Kendala :

   $-2X_1 + 3X_2 = 3$

   $4X_1 + 5X_2 \geq 10$

   $6X_1 + 5X_2 \leq 3$

   $4X_1 + 8X_2 \geq 5$ dan X_1 , $X_2 \geq 0$

5. Memaksimumkan $Z = 100X_1 + 200X_2 + 100X_3 + 150X_4 + 125X_5 + 110X_6 + 120X_7$

   Fungsi Kendala :

   $0.5X_1 + X_2 + 0.25X_3 + 1.5X_4 + 0.75X_5 + 0.9X_6 + 1.2X_7 \leq 7500$

   $X_1 \leq 3000$

   $X_2 \leq 1000$

$$
\begin{array}{lllllll}
X_3 & & & & & \leq & 5000 \\
& X_4 & & & & \leq & 2000 \\
& & X_5 & & & \leq & 1500 \\
& & & X_6 & & \leq & 1550 \\
& & & & X_7 & \leq & 1500
\end{array}
$$

dan $X_j \geq 0$, untuk j = 1, 2, ..., 7.

II. Selesaikan soal-soal yang variabel-variabelnya tidak dibatasi ke dalam model dengan variabel yang dibatasi (non-negatif) memakai cara analisis simpleks.

1. Meminimumkan $Z = -2X_1 + X_2$

   Dengan syarat ikatan :

   $X_1 + X_2 \leq 6$

   $X_1 - X_2 \leq 6$ dan $X_1 \geq 0$, dan X_2 tidak dibatasi.

2. Meminimumkan $Z = 3X_1 + X_2 - 4X_3 + 5X_4 + 9X_5$

   Dengan syarat ikatan :

   $4X_1 - 5X_2 - 9X_3 + X_4 - 2X_5 \leq 6$

   $2X_1 + 3X_2 + 4X_3 - 5X_4 + X_5 \leq 9$

   $X_1 + X_2 - 5X_3 - 7X_4 + 11X_5 \leq 10$

   Dan X_1 , X_2, $X_4 \geq 0$, sedangkan X_3 , X_5 tidak dibatasi.

Penyelesaian Permasalahan Program Linier lewat Dualnya

Contoh soal :

Tentukan X_1 , X_2 , X_3 , ≥ 0 yang meminimumkan $F = 30X_1 + 60X_2 + 72X_3$

dan memenuhi kendala-kendala :

a). $2X_1 + 2X_2 + 4X_3 \geq 3$

b). $X_1 + 3X_2 + 3X_3 \geq 3$, Lewat dualnya !

***Penyelesaian* :**

Bentuk dual dari Permasalahan Program Linier diatas adalah :

Tentukan $Y_1 \geq 0$, $Y_2 \geq 0$ yang memaksimumkan $Z = 3Y_1 + 3Y_2$

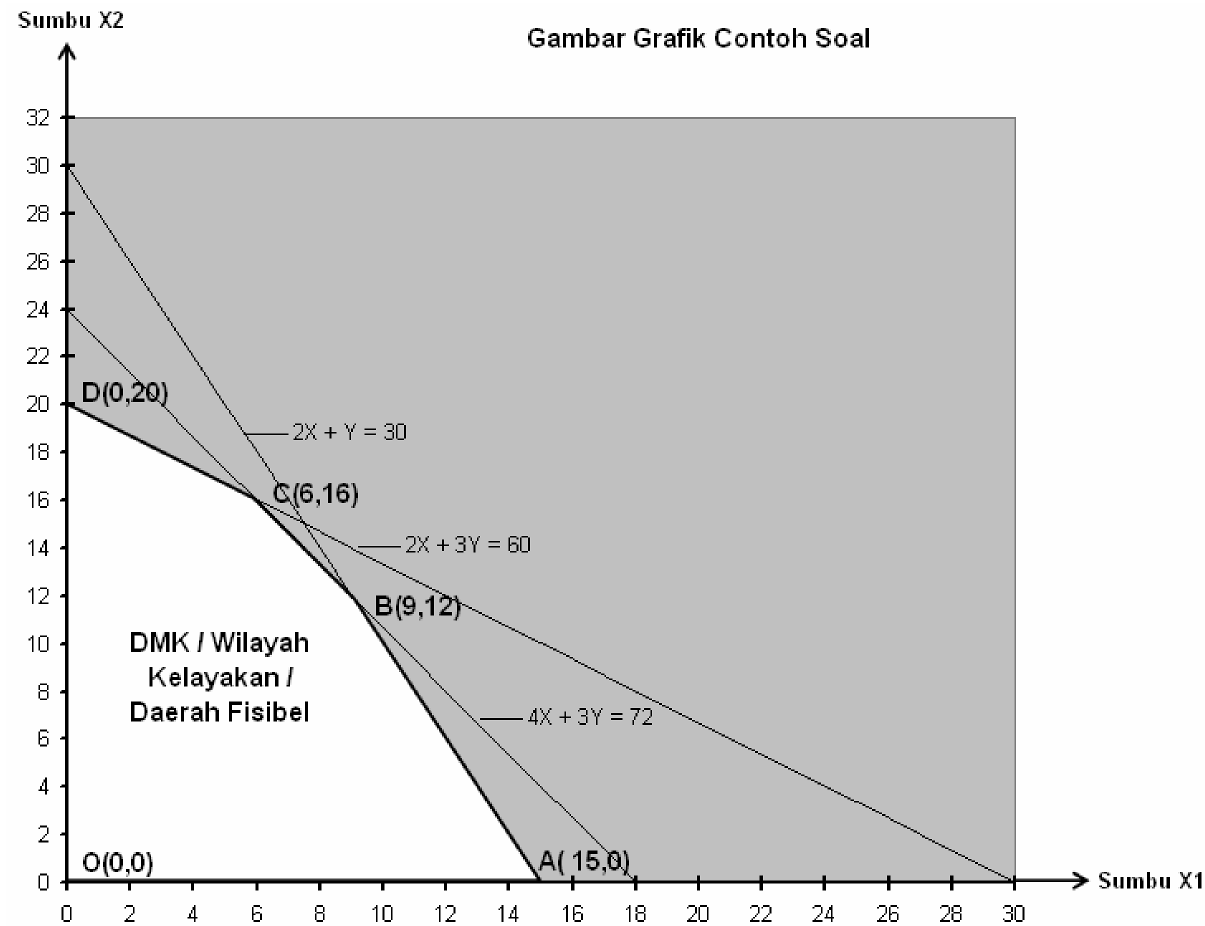
yang memenuhi kendala-kendala :

a). $2Y_1 + Y_2 \leq 30$

b). $2Y_1 + 3Y_2 \leq 60$

c). $4Y_1 + 3Y_2 \leq 72$

Dengan metode grafik diperoleh penyelesaian sebagai berikut.



Daerah yang Memenuhi Kendala (DMK) adalah daerah OABCD yang mempunyai titik sudut-titik sudut sebagai berikut :

Titik O (0,0) $\rightarrow$ Z = 3.0 + 3.0 = 0,

Titik A (15,0) $\rightarrow$ Z = 3.15 + 3.0 = 45,

Titik B(9,12) $\rightarrow$ Z = 3.9 + 3.12 = 63,

Titik **C(6,16)** $\rightarrow$ Z = 3.6 + 3.16 = **66**,

Titik D(0,20) $\rightarrow$ Z = 3.0 + 3.20 = 60,

Jadi Z_{max} = 66, untuk titik C(6,16) masuk dalam syarat,

Untuk $Y_1 = 6$ (jadi $Y_1 > 0$) dan $Y_2 = 16$ (jadi $Y_2 > 0$), dari Fungsi Kendala Bentuk Dual diperoleh :

a). 2.6 + 16 = 28 **<** 30 (tanda dari kendala dual “**<**”).

b). 2.6 + 3.16 = 60 **=** 60 (tanda dari kendala dual adalah “**=**”)

c). 4.6 + 3.16 = 72 **=** 72 (tanda dari kendala dual adalah “**=**”)

	Variabel Primal			
Variabel Dual	$X_1 = 0$	$X_2 > 0$	$X_3 > 0$	
$Y_1 > 0$ $Y_2 > 0$	2 1	2 3	4 3	=3 =3
	<30	=60	=72	

Karena pada Kendala (1) masalah dual bertanda ketidaksamaan (“<”) (< 30) maka variabel pertama masalah primal bertanda “=“ yaitu $X_1 = 0$, dan tanda kendala 2 (= 60) dan kendala 3(= 72) masalah dual bertanda “=” maka variabel kedua dan ketiga masalah primal (X_2 dan X_3 yang positif). Karena variabel-variabel masalah dual ($Y_1 = 6$, dan $Y_2 = 16$) yang positif maka tanda kendala masalah primal adalah “=” (= 3)., sehingga diperleh persamaan berikut:

$$2X_1 + 2X_2 + 4X_3 = 3 \rightarrow 2.0 + 2X_2 + 4X_3 = 3 \rightarrow 2X_2 + 4X_3 = 3 \quad \text{(a)}$$

$$X_1 + 3X_2 + 3X_3 = 3 \rightarrow 1.0 + 3X_2 + 3X_3 = 3 \rightarrow 3X_2 + 3X_3 = 3 \quad \text{(b)}$$

dari rumus (a) dan (b) diperoleh :

$$\begin{array}{r} 6X_2 + 12X_3 = 9 \\ 6X_2 + 6X_3 = 6 \\ \hline 6X_3 = 3 \rightarrow X_3 = 1/2 \end{array} -$$

untuk $X_3 = 1/2$ maka dari persamaan (a) diperoleh $2X_2 + 4(1/2) = 3 \rightarrow X_2 = ½$.

Jadi penyelesaian dari Permasalahan Program Linier diatas adalah :

$X_1 = 0$, $X_2 = 1/2$, $X_3 = 1/2$. Sehingga $F_{min} = 30(0) + 60\ (1/2) + 72\ (1/2) = 66$.

***Soal Latihan** :*

1. Tentukan $X_1 \geq 0$, $X_2 \geq 0$ yang meminimumkan $Z = 6\ X_1 + 8\ X_2$

   yang memenuhi kendala-kendala :

   a. $3X_1 + 3X_2 \geq 4$
   b. $5X_1 + 2X_2 \leq 10$
   c. $X_1 + 2X_2 = 3$

   Selesaikan persoalan diatas lewat dualnya !

2. Tentukanlah $X_1, X_2 \geq 0$ yang memaksmumkan $Z = 3\ X_1 + 5\ X_2$ dan memenuhi kendala :

   a. $2\ X_1 \leq 8$ b. $3\ X_2 \leq 15$ c. $6\ X_1 + 5\ X_2 \leq 30$

   Lewat dualnya !